# Differentialligninger og uendelige rækker

Ole Christensen

# Indhold

**Forord** v

**1 Differentialligninger af $n'$te orden** **3**
1.1 Introduktion . . . 3
1.2 Den homogene ligning . . . 6
1.3 Den inhomogene ligning . . . 12
1.4 Overføringsfunktioner . . . 16
1.5 Frekvenskarakteristikker . . . 19
1.6 Ligninger med variable koefficienter . . . 24
1.7 Partielle differentialligninger . . . 26

**2 Systemer af differentialligninger af 1. orden** **27**
2.1 Introduktion . . . 28
2.2 Den homogene ligning . . . 32
2.3 Fundamentalmatricen . . . 39
2.4 Den inhomogene ligning . . . 40
2.5 Systemer med variable koefficienter . . . 44
2.6 Overføringsfunktioner for systemer . . . 45
2.7 Frekvenskarakteristikker . . . 49
2.8 Stabilitet for homogene systemer . . . 50
2.9 Stabilitet for inhomogene systemer . . . 60

**3 Ulineære differentialligninger** **63**
3.1 Introduktion . . . 63

3.2 1-dimensionale autonome systemer . . . . . . . . . . . . 69
3.3 2-dimensionale autonome systemer . . . . . . . . . . . . 73
3.4 Systemer af dimension 3 eller højere. Kaos. . . . . . . . . 75

**4 Uendelige rækker med konstante led 79**
4.1 Uegentlige integraler . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80
4.2 Talfølger . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
4.3 Taylors sætning . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
4.4 Uendelige rækker af tal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
4.5 Konvergenskriterier for uendelige rækker . . . . . . . . . 93
4.6 Vurdering af summen af en uendelig række . . . . . . . . 98
4.7 Alternerende rækker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104

**5 Uendelige rækker med variable led 107**
5.1 Kvotientrækker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
5.2 Potensrækker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
5.3 Generelle uendelige rækker af funktioner . . . . . . . . . 120
5.4 Uniform konvergens . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 122
5.5 En anvendelse: signaltransmission . . . . . . . . . . . . . 130

**6 Fourieranalyse 133**
6.1 Fourierrækker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 133
6.2 Fouriers sætning og approksimation via Fourierrækker . 139
6.3 Fourierrækker på kompleks form . . . . . . . . . . . . . . 146
6.4 Parsevals sætning . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150
6.5 Fourierrækker og Hilbertrum . . . . . . . . . . . . . . . . 152
6.6 Fouriertransformationen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 156
6.7 Wavelets . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159

**7 Differentialligninger og uendelige rækker 165**
7.1 Potensrækkemetoden . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
7.2 Fourierrækkemetoden . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 172
7.3 Approksimation i effekt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175
7.4 Eksponentialmatricen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 178

**A Appendiks A 183**
A.1 Definitioner og notation . . . . . . . . . . . . . . . . . . 183
A.2 Vektorrum og lineære afbildninger . . . . . . . . . . . . . 185
A.3 $n$'te ordens homogene differentialligninger . . . . . . . . 188
A.4 Systemer af differentialligninger . . . . . . . . . . . . . . 190
A.5 Stabilitet . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 193
A.6 Taylors sætning . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 197
A.7 Konvergenskriterier for uendelige rækker . . . . . . . . . 197
A.8 Potensrækker og generelle uendelige rækker . . . . . . . 201
A.9 Fouriers sætning . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 204

A.10 Fourierrækkemetoden . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 213
A.11 Mere om effekt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215

**B Appendiks B 217**
B.1 Potensrækker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217
B.2 Fourierrækker for $2\pi$-periodiske funktioner . . . . . . . . 218

**C Appendiks C 219**
C.1 Fourierrækker for $T$-periodiske funktioner . . . . . . . . 219

**D Maplekompendium 221**
D.1 Generelt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 221
D.1.1 Dekomposition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 221
D.1.2 Faktorisering af $n$-tegradspolynomium . . . . . . 221
D.1.3 Egenværdier og egenvektorer, eksponentialmatrix 222
D.2 Differentialligninger . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 223
D.2.1 Løsning af differentialligning . . . . . . . . . . . . 223
D.3 Differentialligningssystemer . . . . . . . . . . . . . . . . 224
D.3.1 Løsning af differentialligningssystem . . . . . . . 224
D.3.2 Faseportrætter . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224
D.3.3 Frekvenskarakteristikker . . . . . . . . . . . . . . 225
D.4 Uendelige rækker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 227
D.4.1 Kvotientkriteriet . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 227
D.4.2 Kvotientkriteriet – rækker med variable led . . . 227
D.4.3 Bestemmelse af summen af uendelig række . . . . 228
D.4.4 Integralkriteriet og sætning 4.38 . . . . . . . . . . 229
D.4.5 Fourierrækker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230

**E Symbolliste 233**

**F Opgavesamling 235**
F.1 Uendelige rækker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 235
F.2 Fourierrækker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 250
F.3 $n$'te ordens differentialligninger . . . . . . . . . . . . . 258
F.4 Systemer af differentialligninger . . . . . . . . . . . . . . 262
F.5 Eksamensopgaver . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 271
F.6 Eksamensopgaver . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 293
F.7 Opgaver til 01025 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 307

**Litteratur 327**

# Forord

Denne lærebog er udformet til kurset Matematik 2, der udbydes ved DTU-Matematik. De vigtigste emner er lineære $n$'te ordens differentialligninger, systemer af 1.ordens differentialligninger, samt generelle uendelige rækker og Fourierrækker. For at kunne få udbytte af bogen kræves et godt kendskab til generel funktionsteori, simple differentialligninger af 1.orden og 2.orden, samt lineær algebra. Bogen er i høj grad baseret på tidligere lærebogsmateriale fra Institut for Matematik. Meget af materialet går i sin grundform tilbage til bøgerne *Matematisk Analyse I-IV*, som Helge Elbrønd Jensen forfattede i 1974, og siden reviderede i samarbejde med Tom Høholdt og Frank Nielsen. Visse afsnit i bogen er reviderede udgaver af senere noter og bøger fra instituttet, skrevet af Martin Bendsøe og Wolfhard Kliem, henh. Poul G. Hjorth.

Kapitlerne om uendelige rækker er en oversat udgave af kapitel 2 og 3 i bogen [3], suppleret med flere eksempler og beviser.

I forhold til sidste udgave af bogen er der sket en del ændringer. Der er indsat flere eksempler, og flere udregninger i mange af de eksisterende eksempler. Endvidere er der tilføjet et væsentligt antal beviser. Kortere beviser er indsat direkte i teksten, mens længere argumenter gennemføres i appendiks. Denne struktur bevirker at bogen både kan anvendes til et kursus med et praktisk sigte (01035 Matematik 2) og et kursus der også sigter mod en dybere teoretisk forståelse (01025 Matematik 2). Af sidstnævnte grund er der også tilføjet en længere række opgaver startende med 800-numre og 900-numre, hvor de studerende selv får lejlighed til at give mindre beviser og teoretiske argumenter.

Hermed rettes en tak til alle de kolleger, der gennem tiden har bidraget til udformningen af materialet i denne bog; endvidere takkes Poul G. Hjorth, der har udfærdiget afsnit 3.2–3.4 og figuren på forsiden, samt Preben Alsholm, Per Goltermann, Ernst E. Scheufens, Ole Jørsboe, Carsten Thomassen, Mads Peter Sørensen, og Magnus Ögren, der har bidraget med forslag til tilføjelser og rettelser. Jeg ønsker også at takke de hjælpelærere og studerende, der har bidraget med forslag til forbedringer i tidligere udgaver af manuskriptet.

Ole Christensen
DTU Matematik,
August 2012

# Kapitel 1

# Differentialligninger af $n'$te orden

Differentialligninger spiller en vigtig rolle som matematiske modeller i mange naturvidenskabelige og tekniske problemstillinger. I dette kapitel studeres generelle differentialligninger af $n$'te orden. Fremstillingen er baseret på at læseren allerede (via f.eks. MAT 1) har kendskab til løsning af differentialligninger af 2.orden. Som vi skal se, vil vi opnå ganske parallelle resultater for $n$'te ordens differentialligninger, både hvad angår strukturen af løsningerne til de homogene og inhomogene ligninger, og måden hvorpå man bestemmer løsningerne. Som noget nyt (i forhold til MAT 1) introducerer vi den såkaldte overføringsfunktion, der blandt andet kan bruges til nem bestemmelse af specielle løsninger for visse typer differentialligninger.

## 1.1 Introduktion

Ved en *lineær differentialligning af n'te orden med konstante koefficienter* forstås en ligning af formen

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t), \quad t \in I. \tag{1.1}$$

Her betegner $a$'erne reelle konstanter, og vi antager at $a_0 \neq 0$; endvidere er $u$ en given funktion, der er defineret på intervallet $I$, og $y$ er den søgte funktion. I praksis opskriver man tit ligningen ved brug af notationen

$$\dot{y} = y^{(1)} = \frac{dy}{dt},\ \ddot{y} = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots,\ y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}.$$

Ligningen (1.1) kaldes *inhomogen.* Den til (1.1) svarende *homogene ligning* er

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0. \tag{1.2}$$

En løsning til den homogene ligning (1.2) kaldes en *homogen løsning* eller en *egensvingning.*

Hvis vi benytter $D_n(y)$ som betegnelse for venstre side i (1.1) kan ligningen skrives på formen

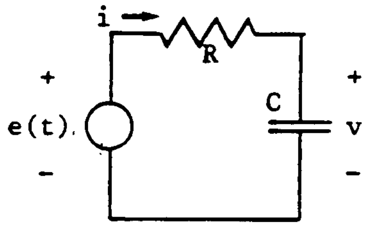
$$D_n(y) = u. \tag{1.3}$$

Den til (1.3) svarende homogene ligning er

$$D_n(y) = 0. \tag{1.4}$$

Mange fysiske systemer (f.eks. lineære kredsløb) kan beskrives ved ligninger af formen (1.3).

**Eksempel 1.1** Kredsløbet på figuren består af en strømforsyning, der er forbundet med en modstand $R$ og en kondensator $C$. Strømforsyningen leverer en variabel spænding, der til tiden $t$ betegnes med $e(t)$. Vi vil opstille en differentialligning til bestemmelse af spændingen $v$ over kondensatoren.




Ifølge Kirchhoffs spændingslov er

$$Ri + v = e(t);$$

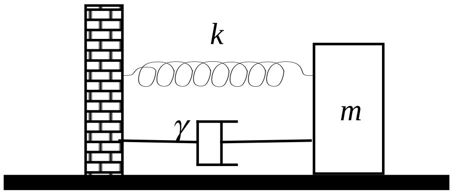
da $i = C\dot{v}$ fås heraf at

$$RC\dot{v} + v = e(t).$$

Dette er en differentialligning til bestemmelse af $v$. □

**Eksempel 1.2** Vi betragter en masse $m$, der via en fjeder er forbundet med en fast væg, og glider på et underlag med en vis friktion (illustreret ved "stemplet"og betegnelsen $\gamma$ på figuren).

Vi antager først at underlaget er friktionsfrit. Denne situation svarer til figuren, men "uden stempel,"svarende til $\gamma = 0$. Vi forestiller os at fjederen trækkes væk fra ligevægtspositionen og slippes. Lad os betegne fjederens udsving (målt ud fra ligevægtspositionen) med $y(t)$, hvor $t$ er tiden. Vi ønsker at opstille en differentialligning til bestemmelse af funktionen $y$.




Massens acceleration under bevægelsen er givet ved $\frac{d^2y}{dt^2}$, så ifølge Newtons 2.lov påvirkes massen af kraften

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Ifølge Hookes lov er fjederens genoprettende kraft, dvs. fjederkraften, proportional med massens udsving fra ligevægtspositionen, og modsat rettet kraften $F$: dvs.

$$F = -ky,$$

hvor konstanten $k > 0$ kaldes fjederkonstanten. Altså er

$$-ky = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

hvilket leder til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0.$$

I praksis vil der altid optræde friktion, som giver anledning til et dæmpningsled i differentialligningen:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0.$$

Tallet $\gamma > 0$ kaldes dæmpningskonstanten. Der er således tale om en homogen lineær 2.ordens differentialligning til bestemmelse af $y$. Hvis massen under bevægelsen påvirkes af en ekstern kraft $F_0$, vil bevægelsen være beskrevet af ligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m},$$

som er en lineær inhomogen 2.ordens differentialligning. □

**Eksempel 1.3** Vi betragter en bjælke eller en søjle, som vi forestiller os placeret langs $x$-aksen i et $xy$-koordinatsystem. Vi antager at objektet er

i ro, men er påvirket af en konstant kraft og evt. en fysisk belastning. Udbøjningen $y(x)$ af objektet beskrives af en differentialligning på formen

$$A\,\frac{d^4y}{dx^4} - N\,\frac{d^2y}{dx^2} - p = 0.$$

Her betegner $A, N$, og $p$ fysiske parametre der afhænger af materialet, de virkende kræfter, og belastningen. Parametrene $A$ og $p$ er positive eller nul, men afhængigt af situationen kan $N$ være positiv, nul, eller negativ. For en søjle kan man vise at differentialligningen får formen

$$A\,\frac{d^4y}{dx^4} - N\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{1.5}$$

hvor $N < 0$. □

## 1.2 Den homogene ligning

Vi skal i dette afsnit beskrive strukturen af løsningerne til den homogene ligning

$$a_0\frac{d^ny}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_ny = 0,$$

samt hvorledes samtlige løsninger hertil findes i praksis. Som nævnt vil vi skrive ligningen på kort form som

$$D_n(y) = 0. \tag{1.6}$$

Sætning 1.4 forneden udtrykker en fundamental linearitetsegenskab ved løsningerne til (1.6):

**Sætning 1.4** *Hvis funktionerne $y_1$ og $y_2$ er løsninger til* (1.6) *og $c_1$ og $c_2$ er konstanter, da er funktionen $y = c_1y_1 + c_2y_2$ også løsning til* (1.6).

Sætning 1.4 bevises i appendiks A.3. Den viser, at løsningerne til (1.6) udgør et vektorrum; det kaldes *løsningsrummet*. I den følgende sætning angives dette rums dimension:

**Sætning 1.5** *Løsningerne til* (1.6) *udgør et $n$-dimensionalt vektorrum. Samtlige løsninger til* (1.6) *kan altså skrives på formen*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n,$$

*hvor c'erne er vilkårlige konstanter og $y_1, y_2, \ldots, y_n$ er $n$ vilkårlige lineært uafhængige løsninger.*

Formålet med dette afsnit er at beskrive, hvordan man kan bestemme $n$ lineært uafhængige løsninger til den homogene ligning $D_n(y) = 0$. Til det formål betragtes *karakterligningen*, der er givet ved

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{1.7}$$

Polynomiet på venstresiden i karakterligningen kaldes *det karakteristiske polynomium*, og betegnes

$$P(\lambda) := a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{1.8}$$

Vores udgangspunkt er den følgende sætning:

**Sætning 1.6** *Hvis $\lambda$ er en reel eller kompleks rod i karakterligningen, så har differentialligningen* (1.6) *løsningen*

$$y(t) = e^{\lambda t}. \tag{1.9}$$

*Løsninger, der svarer til* forskellige *værdier af $\lambda$, er lineært uafhængige.*

**Bevis:** Vi beviser sætningens første halvdel, nemlig at funktionen $y(t) = e^{\lambda t}$ er løsning når $\lambda$ er rod i karakterligningen. Vi bemærker først at

$$y'(t) = \lambda\, e^{\lambda t}, \quad y''(t) = \lambda^2\, e^{\lambda t},$$

og helt generelt, for $k = 1, 2, \ldots,$

$$y^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} D_n(y) &= a_0\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y \\ &= a_0\lambda^n e^{\lambda t} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_{n-1}\lambda e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} \\ &= \left[a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right] e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Leddet i den kantede parentes er netop det karakteristiske polynomium, og dermed nul når $\lambda$ er en rod i karakterligningen. Altså er $D_n(y) = 0$, og vi har vist at funktionen $y(t) = e^{\lambda t}$ er løsning til differentialligningen. Vedrørende sætningens anden halvdel henvises til opgave 905. □

I det tilfælde, hvor karakterligningen har $n$ forskellige (reelle eller komplekse) rødder, kan vi på grundlag af sætning 1.5 og sætning 1.6 opskrive samtlige komplekse løsninger til den homogene ligning: vi skal simpelthen danne linearkombinationer af de løsninger vi får via (1.9).

**Eksempel 1.7** Betragt differentialligningen

$$\dddot{y} + \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0. \tag{1.10}$$

Karakterligningen er

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0;$$

den har 3 forskellige rødder, nemlig $\lambda = -1$ og $\lambda = \pm 2i$. Heraf følger af sætning 1.6 at ligningen (1.10) har de 3 lineært uafhængige løsninger

$$y(t) = e^{-t}, \quad y(t) = e^{2it}, \quad y(t) = e^{-2it}.$$

Samtlige komplekse løsninger til (1.10) er dermed

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2it} + c_3 e^{-2it}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

I forbindelse med konkrete problemstillinger er man normalt interesseret i at kende den fuldstændige *reelle* løsning. I den forbindelse er der to problemstillinger vi skal have afklaret:

- Karakterligningen kan have komplekse rødder, der leder til komplekse løsninger til (1.6). Vi skal beskrive hvordan man finder de tilsvarende reelle løsninger.
- Sætning 1.6 giver kun en basis for løsningsrummet hvis karakterligningen har *$n$ forskellige rødder.* Vi mangler således at beskrive hvorledes man kan finde den fuldstændige løsning i tilfælde af multiple rødder (den præcise definition gives i definition 1.13).

I resten af dette afsnit diskuteres disse problemstillinger i detaljer.

Da koefficienterne i differentialligningen er antaget at være reelle, er alle koefficienterne i karakterligningen

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

ligeledes reelle. Dermed vil alle komplekse rødder i karakterligningen optræde i *komplekst konjugerede par:* det vil sige, hvis tallet $\lambda = a + i\omega$ er rod i karakterligningen, så er også tallet $\overline{\lambda} = a - i\omega$ en rod.

Hvis $\lambda$ er en kompleks rod i karakterligningen, så er den løsning der angives i sætning 1.6 også kompleks. Skrives $\lambda = a + i\omega$, så kan løsningen ifølge definitionen af den komplekse eksponentialfunktion skrives som

$$\begin{aligned} y(t) = e^{\lambda t} = e^{(a+i\omega)t} = e^{at}e^{i\omega t} &= e^{at}\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) \\ &= e^{at}\cos\omega t + ie^{at}\sin\omega t. \end{aligned} \tag{1.11}$$

For at skaffe reelle løsninger vil vi benytte følgende hjælperesultat:

**Lemma 1.8** *Hvis funktionen $y$ er løsning til* (1.6)*, så er de to reelle funktioner* $\operatorname{Re} y$ *og* $\operatorname{Im} y$ *også løsninger.*

**Bevis:** Antag at $y = \operatorname{Re} y + i \operatorname{Im} y$ er en kompleks løsning til (1.6), altså at $D_n(y) = 0$. Da

$$D_n(y) = D_n(\operatorname{Re} y + i\operatorname{Im} y) = D_n(\operatorname{Re} y) + iD_n(\operatorname{Im} y) = 0$$

kan vi slutte at $D_n(\operatorname{Re} y) = 0$ og $D_n(\operatorname{Im} y) = 0$. Dermed er $\operatorname{Re} y$ og $\operatorname{Im} y$ løsninger til differentialligningen. $\square$

Via (1.11) og lemma 1.8 sluttes nu at hvis $\lambda = a + i\omega$ er en kompleks rod i karakterligningen for (1.6), så er de to funktioner

$$y(t) = \operatorname{Re} e^{\lambda t} = e^{at}\cos\omega t \quad \text{og} \quad y(t) = \operatorname{Im} e^{\lambda t} = e^{at}\sin\omega t$$

reelle løsninger til differentialligningen (1.6). Det fremgår af lemma A.15 i appendiks A.4 at disse funktioner er lineært uafhængige. Hermed har vi en metode til at opskrive et sæt lineært uafhængige reelle løsninger:

**Sætning 1.9** *Betragt den homogene ligning $D_n(y) = 0$. For at bestemme et sæt reelle lineært uafhængige løsninger gøres følgende:*

*(i) For hver reel rod $\lambda$ i karakterligningen opskrives den reelle løsning $y(t) = e^{\lambda t}$.*

*(ii) For hvert par af konjugerede komplekse rødder, $\lambda = a + i\omega$ og $\overline{\lambda} = a - i\omega$, opskrives de reelle løsninger*

$$y(t) = Re(e^{\lambda t}) = e^{at}\cos\omega t \quad og \quad y(t) = \text{Im}\,(e^{\lambda t}) = e^{at}\sin\omega t. \tag{1.12}$$

*De opskrevne løsninger er lineært uafhængige.*

Hvis karakterligningen har $n$ forskellige rødder fås via sætning 1.9 $n$ lineært uafhængige homogene løsninger. Samtlige løsninger kan dernæst opskrives ved at danne linearkombinationer, se sætning 1.5.

Bemærk at løsningerne i (1.12) hører til *parret* af egenværdier $a \pm i\omega$ : vi skal altså kun opskrive disse løsninger *enten* for egenværdien $a + i\omega$ *eller* for $a - i\omega$. Dette illustreres i følgende eksempel:

**Eksempel 1.10** Vi betragter igen differentialligningen fra eksempel 1.7,

$$\dddot{y} + \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0.$$

Vi så i eksempel 1.7 at karakterligningen har de komplekse rødder $\lambda = \pm 2i$. Vi har således $a = 0$ og $\omega = 2$, og kan ifølge sætning 1.9 opskrive de reelle løsninger

$$y(t) = \text{Re}\, e^{2it} = \cos 2t \quad \text{og} \quad y(t) = \text{Im}\, e^{2it} = \sin 2t.$$

Husk at vi i eksempel 1.7 også fandt den reelle løsning $y(t) = e^{-t}$. Den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen er således givet ved

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2\cos 2t + c_3\sin 2t, \quad \text{hvor} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

**Eksempel 1.11** Differentialligningen

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega > 0,$$

har karakterligningen $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Den kan også skrives som

$$\lambda^2 = -\omega^2,$$

hvoraf det aflæses at rødderne er $\lambda = \pm i\omega$. Samtlige reelle løsninger til differentialligningen er derfor ifølge sætning 1.9(ii)

$$y(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t,$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Vi vender os nu mod problemstillingen med multiple rødder. Her bemærkes først, at da karakterligningen er en $n'$te gradsligning, har den altid $n$ rødder. Det kan dog sagtens forekomme at der *ikke er $n$ forskellige* rødder, og i dette tilfælde tales om *multiple rødder.* Før vi giver den præcise definition, betragtes et lille illustrerende eksempel.

**Eksempel 1.12** Betragt differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Her er karakterligningen

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

som også kan skrives

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Selvom der er tale om en andengradsligning, er der altså kun een løsning til ligningen, nemlig $\lambda = -1$. I dette tilfælde siges $\lambda = -1$ at være en *dobbeltrod* eller en *multipel rod.* □

Den formelle definition af multiple rødder og multiplicitet er baseret på *algebraens fundamentalsætning,* der fortæller os at det karakteristiske polynomium kan skrives som et produkt af førstegrads-polynomier:

**Definition 1.13 (Algebraisk multiplicitet)** *Skriv det karakteristiske polynomium som produkt af førstegradsfaktorer,*

$$P(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{p_k},$$

*hvor $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$. Tallet $p_i$ kaldes den algebraiske multiplicitet af roden $\lambda_i$.*

I eksempel 1.12 ser vi således at $\lambda = -1$ er rod med algebraisk multiplicitet $p = 2$.

Hvis én eller flere rødder i karakterligningen har algebraisk multiplicitet $p > 1$, så leder metoden i sætning 1.9 ikke til den fuldstændige løsning af $n'$te-ordensligningen. I dette tilfælde får vi brug for den følgende sætning:

**Sætning 1.14** *Antag at $\lambda$ er rod i karakterligningen med algebraisk multiplicitet $p$. Så har differentialligningen $D_n(y) = 0$ de lineært uafhængige løsninger*

$$y_1(t) = e^{\lambda t},\ y_2(t) = te^{\lambda t},\ \cdots, y_p(t) = t^{p-1}e^{\lambda t}. \tag{1.13}$$

Beviset for sætning 1.14 kræver en del forarbejde, og gives i appendiks A.3. I tilfælde af at man har et sæt komplekst konjugerede rødder $a \pm i\omega$, der

optræder med multiplicitet $p > 1$, kan man, helt i stil med resultatet i sætning 1.9, opskrive $2p$ lineært uafhængige reelle løsninger givet ved

$$y_1(t) = e^{at}\cos\omega t,\ y_2(t) = te^{at}\cos\omega t, \cdots, y_p(t) = t^{p-1}e^{at}\cos\omega t$$

og

$$y_{p+1}(t) = e^{at}\sin\omega t,\ y_{p+2}(t) = te^{at}\sin\omega t, \cdots, y_{2p}(t) = t^{p-1}e^{at}\sin\omega t.$$

Vi sammenfatter de opnåede resultater i følgende sætning, der beskriver hvorledes den fuldstændige løsning til (1.6) bestemmes:

**Sætning 1.15 (Fuldstændige løsning til** (1.6)**)** *Den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning $D_n(y) = 0$ bestemmes på følgende måde:*

*(i) (komplekse løsninger) For hver rod $\lambda$ i karakterligningen opskrives løsningen $y(t) = e^{\lambda t}$, samt, hvis $\lambda$ har algebraisk multiplicitet $p > 1$, løsningerne*

$$y(t) = te^{\lambda t}, \cdots, y(t) = t^{p-1}e^{\lambda t}.$$

*Den fuldstændige komplekse løsning fås ved at danne linearkombinationer af disse $n$ løsninger, med komplekse koefficienter.*

*(ii) (reelle løsninger) For hver reel rod $\lambda$ i karakterligningen opskrives løsningerne nævnt under (i). For hvert par af komplekst konjugerede rødder $a \pm i\omega$ opskrives endvidere løsningerne*

$$y(t) = e^{at}\cos\omega t \quad og \quad y(t) = e^{at}\sin\omega t,$$

*samt, hvis $a \pm i\omega$ har multiplicitet $p > 1$, løsningerne*

$$y(t) = te^{at}\cos\omega t, \cdots, y(t) = t^{p-1}e^{at}\cos\omega t$$

*og*

$$y(t) = te^{at}\sin\omega t, \cdots, y(t) = t^{p-1}e^{at}\sin\omega t.$$

*Den fuldstændige reelle løsning fås ved at danne linearkombinationer af disse $n$ løsninger, med reelle koefficienter.*

**Eksempel 1.16** For differentialligningen

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 4y = 0$$

er det karakteristiske polynomium givet ved

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4.$$

Ved faktorisering af polynomiet (se evt. Maplekompendiet) ses at

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1).$$

Rødderne er således $\lambda = -1$ og $\lambda = 2$, hvoraf sidstnævnte har algebraisk multiplicitet $p = 2$. Ifølge sætning 1.15 kan vi derfor opskrive de 3 lineært

uafhængige løsninger

$$y(t) = e^{-t}, \quad y(t) = e^{2t}, \quad \text{og} \quad y(t) = te^{2t}.$$

Den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen er således

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. □

**Eksempel 1.17** For differentialligningen

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 8y^{(3)} + 8y^{(2)} + 16y' + 16y = 0$$

er det karakteristiske polynomium givet ved

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 8\lambda^3 + 8\lambda^2 + 16\lambda + 16.$$

Ved faktorisering af polynomiet (se evt. Maplekompendiet) ses at

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 4)^2(\lambda + 1).$$

Rødderne er således $\lambda = -1$ og $\lambda = \pm 2i$, hvoraf sidstnævnte har algebraisk multiplicitet $p = 2$. Ifølge sætning 1.15 kan vi derfor opskrive de 5 lineært uafhængige løsninger

$$y(t) = e^{-t},\ y(t) = e^{2it},\ y(t) = te^{2it},\ y(t) = e^{-2it},\ y(t) = te^{-2it}.$$

Den fuldstændige komplekse løsning er således

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2it} + c_3 t e^{2it} + c_4 e^{-2it} + c_5 t e^{-2it},\ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{C}.$$

Den fuldstændige reelle løsning er ifølge sætning 1.15

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos 2t + c_3 t \cos 2t + c_4 \sin 2t + c_5 t \sin 2t,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$. □

## 1.3 Den inhomogene ligning

Vi vender os nu mod behandlingen af den inhomogene ligning,

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t),$$

hvor $u$ er en kontinuert funktion med reelle (eller komplekse) værdier. Vi forestiller os, at funktionen $u$ er defineret på et interval $I$, og vi søger en løsning $y$, der er defineret på det samme interval. Som tidligere nævnt vil vi skrive ligningen på kort form som

$$D_n(y) = u. \tag{1.14}$$

Hvis $u$ er kontinuert har ligningen (1.14) altid uendelig mange løsninger. Der gælder nemlig følgende vigtige sætning:

**Sætning 1.18 (Eksistens- og entydighedssætningen)** *Antag at funktionen* $u(t), t \in I$, *er kontinuert. For ethvert* $t_0 \in I$ *og enhver vektor* $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *findes præcis én løsning* $y(t), t \in I$, *til (1.14) for hvilken det gælder, at*

$$(y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)) = (v_1, \ldots, v_n)$$

De på forhånd fastlagte værdier af vektoren

$$(y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0))$$

kaldes *begyndelsesbetingelser* i $t_0$.

**Eksempel 1.19** Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \cos(2t)$$

er et eksempel på en inhomogen ligning af anden orden. For ethvert sæt af talværdier $v_1, v_2$ og et givet $t_0$, findes ifølge sætning 1.18 netop een løsning $y(t)$ for hvilken

$$y(t_0) = v_1, \quad y'(t_0) = v_2.$$

I eksempel 1.21 vender vi tilbage til differentialligningen og finder løsningen hørende til en konkret begyndelsesbetingelse. □

Vi formulerer endvidere en sætning, der udtrykker en sammenhæng mellem de homogene løsninger og løsningerne til den inhomogene ligning. Et tilsvarende resultat for differentialligninger af 2.orden kendes allerede fra MAT 1.

**Sætning 1.20** *Lad* $y_0$ *betegne en løsning til ligningen* (1.14), $D_n(y) = u$, *og lad* $y_{HOM}$ *betegne samtlige løsninger til den tilsvarende homogene ligning. Da er*

$$y = y_0 + y_{HOM}$$

*samtlige løsninger til* (1.14).

**Bevis:** Antag først at $y_0$ er løsning til den inhomogene ligning $D_n(y) = u$ og at $y_{HOM}$ er en løsning til den tilsvarende homogene ligning. Med $y = y_0 + y_{HOM}$ fås dermed

$$D_n(y) = D_n(y_0 + y_{HOM}) = D_n(y_0) + D_n(y_{HOM}) = D_n(y_0) = u.$$

Altså er $y$ en løsning til den inhomogene ligning. Omvendt, hvis funktionerne $y$ og $y_0$ begge er løsninger til den inhomogene ligning (1.14), så er

$$D_n(y - y_0) = D_n(y) - D_n(y_0) = u - u = 0.$$

Altså er funktionen $y - y_0$ en løsning til den homogene ligning. Dette viser at vi kan skrive $y = y_0 + (y - y_0)$, altså at $y$ er en sum af funktionen $y_0$ og en løsning til den homogene ligning. □

Den i sætningen omtalte løsning $y_0$ kaldes en *partikulær* løsning. Den partikulære løsning kan undertiden findes ved hjælp af *gættemetoden*. Denne metode består i at man gætter på en løsning $y_0$, der "minder" om $u$. Funktionen $y_0$ skal indeholde én eller flere parametre, som man ved indsættelse i ligningen afpasser så $y_0$ faktisk bliver løsning. De vigtigste tilfælde er:

- Antag at $u(t)$ er en (evt. kompleks) eksponentialfunktion,
  $$u(t) = be^{st}.$$
  Man gætter da på $y(t) = ce^{st}$ (samme $s$!), hvor $c$ er en kompleks konstant, der bestemmes ved indsætning i ligningen.
- Antag at $u(t) = \sin(kt)$. Så gættes på en løsning af formen
  $$y(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt).$$
  Bemærk at man altså gætter på en sum af cosinus- og sinusfunktioner, selvom funktionen $u$ kun indeholder et sinusled! Dette skyldes at der normalt vil optræde cosinusled når man indsætter en sinusfunktion i differentialligningen. Samme metode anvendes når $u(t) = \cos(kt)$.
- Antag at $u(t)$ er et polynomium af grad $k$,
  $$u(t) = c_0t^k + c_1t^{k-1} + \cdots + c_{k-1}t + c_k.$$
  I dette tilfælde gættes på en løsning der er et polynomium af grad $n + k$,
  $$y(t) = d_0t^{n+k} + d_1t^{n+k-1} + \cdots + d_{n+k-1}t + d_{n+k}.$$

**Eksempel 1.21** Vi ønsker at bestemme den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \cos(2t), \tag{1.15}$$
samt finde den løsning for hvilken $y(0) = y'(0) = 1$. Vi vil benytte gættemetoden. Vi sætter altså
$$y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t).$$
Så er
$$y'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$$
og
$$y''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t).$$

Ved indsættelse i differentialligningen fås

$$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) + 2(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) + A\cos(2t) + B\sin(2t) = \cos(2t),$$

der omformes til

$$(-4A + 4B + A)\cos(2t) + (-4B - 4A + B)\sin(2t) = \cos(2t),$$

eller

$$(-3A + 4B)\cos(2t) + (-4A - 3B)\sin(2t) = \cos(2t).$$

Ved at sammenligne koefficienterne til $\cos(2t)$ og $\sin(2t)$ på højresiden og venstreside ses at ligningen er opfyldt hvis

$$-3A + 4B = 1 \text{ og } -4A - 3B = 0.$$

Løsningen hertil er $A = \frac{-3}{25}$, $B = \frac{4}{25}$, så differentialligningen har den partikulære løsning

$$y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) = \frac{-3}{25}\cos(2t) + \frac{4}{25}\sin(2t).$$

For at finde den fuldstændige løsning opskriver vi nu den tilsvarende homogene ligning,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Karakterligningen er $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, som også kan skrives som

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Her er $\lambda = -1$ rod med algebraisk multiplicitet 2. Den homogene ligning har dermed ifølge sætning 1.15 den fuldstændige reelle løsning

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ifølge sætning 1.20 har ligningen (1.15) dermed den fuldstændige reelle løsning

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0(t) + y_{HOM}(t) \\ &= \frac{-3}{25}\cos(2t) + \frac{4}{25}\sin(2t) + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, \end{aligned}$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ifølge sætning 1.18 findes blandt disse løsninger præcis een løsning for hvilken $y(0) = y'(0) = 1$. For at finde denne løsning bemærkes først at

$$y'(t) = \frac{6}{25}\sin(2t) + \frac{8}{25}\cos(2t) - c_1 e^{-t} + c_2(e^{-t} - t e^{-t}).$$

Ved at indsætte $t = 0$ ses at betingelserne $y(0) = y'(0) = 1$ bliver til

$$\frac{-3}{25} + c_1 = 0, \text{ og } \frac{8}{25} - c_1 + c_2 = 0,$$

som har løsningen $c_1 = \frac{3}{25}$, $c_2 = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}$. Den søgte løsning er derfor

$$y(t) = \frac{-3}{25}\cos(2t) + \frac{4}{25}\sin(2t) + \frac{3}{25}\,e^{-t} - \frac{1}{5}\,te^{-t}.$$

□

Den følgende sætning fortæller, hvordan det tilfælde, hvor højre side er en flerleddet størrelse, kan føres tilbage til ligninger, der kun indeholder et enkelt led på højre side.

**Sætning 1.22 (Superpositionsprincippet)** *Lad $u_1$ og $u_2$ betegne to givne funktioner. Lad $y_1$ betegne en løsning til ligningen $D_n(y) = u_1$, og lad $y_2$ betegne en løsning til ligningen $D_n(y) = u_2$. Da er funtionen $y = c_1y_1 + c_2y_2$ løsning til ligningen $D_n(y) = c_1u_1 + c_2u_2$.*

**Bevis:** Ved direkte indsættelse af funktionen $y = c_1y_1+c_2y_2$ i udtrykket for $D_n(y)$, ses at

$$D_n(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1D_n(y_1) + c_2D_n(y_2) = c_1u_1 + c_2u_2.$$

Altså er funktionen $y = c_1y_1 + c_2y_2$ en løsning til ligningen $D_n(y) = c_1u_1 + c_2u_2$. □

## 1.4 Overføringsfunktioner

I dette afsnit skal vi indføre det vigtige begreb overføringsfunktion for differentialligninger af $n$'te orden. Vi starter med at betragte differentialligninger på den specielle form

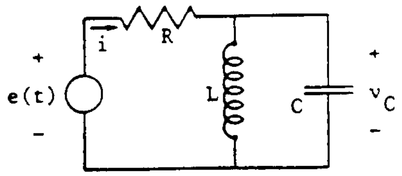
$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = b_0u^{(m)} + b_1u^{(m-1)} + \cdots + b_mu; \qquad (1.16)$$

som tidligere betegner $u$ en given funktion, og $y$ er den søgte løsning. Vi antager at alle koefficienterne $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$ er reelle. En differentialligning af denne form forekommer tit, når man skal opskrive en differentialligning til bestemmelse af en ukendt størrelse $y$ i et fysisk system. Funktionen $u(t)$ betegner da den ydre påvirkning på systemet. Mere konkret kan $u$ f.eks. være en kraft, der påvirker et mekanisk system; løsningen $y$ kan f.eks. betegne positionen af en af de mekaniske dele.

Analysen af en differentialligning på formen (1.16) kan naturligvis gennemføres nøjagtigt som for ligningen (1.14), ved simpelthen at regne højresiden i (1.16) ud og betragte den fremkomne funktion som vores påvirkning. Formen (1.16) viser sig dog at være bekvem: som vi skal se i dette afsnit kan man f.eks. indføre en såkaldt overføringsfunktion, der beskriver systemets generelle opførsel, uafhængigt af den valgte funktion $u$. I tilfældet hvor $u$ f.eks. beskriver en kraft virkende på et system, kan

man altså uddrage generelle konklusioner om systemets opførsel, og herefter vælge $u$ passende.

**Eksempel 1.23** Vi vil opskrive en differentialligning til bestemmelse af strømmen $I$ angivet på figuren, hvor en strømforsyning leverer spændingen $e(t)$ til et kredsløb bestående af en modstand $R$, en kondensator $C$, og en spole $L$.




Der gælder følgende system af 3 ligninger med 3 ubekendte:

$$\begin{cases} v_C = L\dot{I}_L, \\ I = I_L + C\dot{v}_C, \\ e = RI + v_C. \end{cases}$$

For at finde en differentialligning i den ubekendte strøm $I$ skal $v_C$ og $I_L$ elimineres af disse ligninger. Af den sidste ligning fås, at $v_C = e - RI$. Ved indsætning af dette i de to første ligninger får man, at $e - RI = L\dot{I}_L$ og $I = I_L + C(\dot{e} - R\dot{I})$. Strømmen $I_L$ skal elimineres af disse to ligninger. Af den sidste ligning fås, at $I_L = I - C\dot{e} + RC\dot{I}$. Dette indsættes i den første ligning, der herved bliver

$$e - RI = L(\dot{I} - C\ddot{e} + RC\ddot{I}),$$

eller

$$RCL\ddot{I} + L\dot{I} + RI = LC\ddot{e} + e. \tag{1.17}$$

Denne ligning har formen (1.16). □

Undertiden er det nyttigt at betragte differentialligningen (1.16) som en *afbildning*, der afbilder en *påvirkning* $u(t)$ (og et sæt begyndelsesbetingelser) på et *svar* $y(t)$, der er løsningen til differentialligningen. Lad os betragte det specielle tilfælde, hvor påvirkningen er en eksponentialfunktion,

$$u(t) = e^{st} \tag{1.18}$$

for et givet $s \in \mathbb{C}$. Vi vil undersøge om der findes en løsning af samme form, dvs.

$$y(t) = H(s)e^{st}, \tag{1.19}$$

hvor $H(s)$ ikke afhænger af $t$. Til det formål indsætter vi funktionerne $u$ og $y$ i differentialligningen (1.16). Vi bemærker først at $u'(t) = se^{st}$, og mere generelt, for $k = 1, 2, \ldots,$

$$u^{(k)}(t) = s^k e^{st}.$$

Tilsvarende ses at $y'(t) = H(s)se^{st}$, og mere generelt, for $k = 1, 2, \ldots,$

$$y^{(k)}(t) = H(s)s^k e^{st}.$$

Derfor tager (1.16) formen

$$\begin{aligned} & a_0 H(s)s^n e^{st} + a_1 H(s)s^{n-1}e^{st} + \cdots + a_n H(s)e^{st} \\ = \quad & b_0 s^m e^{st} + b_1 s^{m-1} e^{st} + \cdots + b_m e^{st}. \end{aligned}$$

Dette kan også skrives som

$$\begin{aligned} H(s)(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)e^{st} = \\ (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m)e^{st}. \end{aligned}$$

Vi bemærker, at faktoren

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

er det karakteristiske polynomium for (1.16). Vi ser nu, at når $s$ ikke er rod i karakterligningen for (1.16), altså når $P(s) \neq 0$, da er (1.19) løsning til (1.16) når og kun når

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}. \tag{1.20}$$

Den herved bestemte funktion $H$ af den komplekse variabel $s$ kaldes *overføringsfunktionen* for (1.16). Vi bemærker, at funktionen $H(s)$ kun er defineret for de værdier af $s \in \mathbb{C}$ for hvilke $P(s) \neq 0$. Ved bestemmelse af overføringsfunktionen skal man angive såvel funktionsudtrykket som definitionsmængden; se eksempel 1.25.

Lad os formulere det opnåede resultat formelt:

**Sætning 1.24 (Stationære svar)** *Når man i* (1.16) *sætter*

$$u(t) = e^{st},$$

*hvor $s$ ikke er rod i karakterligningen, da har* (1.16) *en og kun én løsning af formen*

$$y(t) = H(s)e^{st}. \tag{1.21}$$

*Denne løsning fås når $H$ er overføringsfunktionen for* (1.16)*. Løsningen* (1.21) *kaldes det stationære svar på påvirkningen $e^{st}$.*

Vi bemærker at man ved konkrete anvendelser *direkte* kan opskrive udtrykket for overføringsfunktionen ved at betragte koefficienterne i den forelagte differentialligning (1.16):

**Eksempel 1.25** Betragt differentialligningen

$$\ddot{y} + y = \dot{u}. \tag{1.22}$$

Via (1.20) kan vi direkte aflæse at overføringsfunktionen er

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Overføringsfunktionen er defineret når $s^2 + 1 \neq 0$, dvs. for $s \neq \pm i$. Hvis specielt $u(t) = e^{2t}$ får man ved at sætte $s = 2$ at ligningen (1.22) har løsningen

$$y(t) = H(2)e^{2t} = \frac{2}{5}e^{2t}$$ □

## 1.5 Frekvenskarakteristikker

Den vigtigste anvendelse af begrebet overføringsfunktion forekommer når $s = i\omega$, hvor $\omega$ er en positiv reel konstant. Påvirkningen

$$u(t) = e^{i\omega t} \tag{1.23}$$

er da periodisk med periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Funktionen $u$ beskriver således en svingning med frekvens $\frac{\omega}{2\pi}$. Af sætning 1.24 følger, at når $s = i\omega$ ikke er rod i karakterligningen, $P(i\omega) \neq 0$, da har differentialligningen en periodisk løsning $y(t)$ med periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$, nemlig

$$y(t) = H(i\omega)e^{i\omega t}. \tag{1.24}$$

Vi vil nu benytte dette resultat til at bestemme en løsning til (1.16) når $u(t) = \cos \omega t$. Hertil benyttes

**Sætning 1.26** *Antag at $y_0$ er en kompleks løsning til $D_n(y) = u$, hvor $u$ er en funktion med komplekse værdier. Da gælder følgende:*

*(i) Funktionen $\operatorname{Re} y_0$ er løsning til ligningen $D_n(y) = \operatorname{Re} u$;*

*(ii) Funktionen $\operatorname{Im} y_0$ er løsning til ligningen $D_n(y) = \operatorname{Im} u$.*

**Bevis:** Af $D_n(y_0) = u$ fås ved konjugering, at $D_n(\bar{y}_0) = \bar{u}$. Ved addition af disse to ligninger (og division med 2) fås, at $D_n(\operatorname{Re} y_0) = \operatorname{Re} u$. Altså er $y = \operatorname{Re} y_0$ løsning til ligningen $D_n(y) = \operatorname{Re} u$. På tilsvarende måde fås sætningen om imaginærdelen ved subtraktion. □

Af sætning 1.26 og (1.24) følger, at hvis

$$u(t) = \operatorname{Re} e^{i\omega t} = \cos \omega t$$

og $P(i\omega) \neq 0$, så er

$$y(t) = \operatorname{Re}\left(H(i\omega)e^{i\omega t}\right)$$

løsning til differentialligningen. Vi vil nu omskrive dette udtryk. Hertil bemærkes, at et vilkårligt komplekst tal $a + ib$ kan skrives på formen

$$a + ib = |a + ib|\, e^{iArg(a+ib)};$$

her betegner $Arg(a + ib)$ *argumentet*, dvs. vinklen (tilhørende intervallet $]-\pi, \pi]$) mellem den reelle akse og linien gennem punkterne 0 og $a + ib$. Vi kan altså skrive $H(i\omega)$ på formen

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|\, e^{iArgH(i\omega)};$$

dermed er

$$\begin{aligned} Re\left(H(i\omega)e^{i\omega t}\right) &= Re\left(|H(i\omega)|\, e^{iArgH(i\omega)}e^{i\omega t}\right) \\ &= Re\left(|H(i\omega)|\, e^{i(\omega t + ArgH(i\omega))}\right) \\ &= |H(i\omega)|\, \cos(\omega t + \operatorname{Arg} H(i\omega)). \end{aligned}$$

Vi har hermed vist (i) i følgende sætning:

**Sætning 1.27 (Stationære svar)** *Antag at $i\omega$ ikke er rod i karakterligningen for* (1.16)*. Så gælder følgende:*

*(i) Når $u(t) = \cos \omega t$, da har* (1.16) *løsningen*

$$y(t) = \operatorname{Re}\left(H(i\omega)e^{i\omega t}\right) = |H(i\omega)| \cos(\omega t + \operatorname{Arg} H(i\omega)). \tag{1.25}$$

*(ii) Når $u(t) = \sin \omega t$, da har* (1.16) *løsningen*

$$y(t) = \operatorname{Im}\left(H(i\omega)e^{i\omega t}\right) = |H(i\omega)| \sin(\omega t + \operatorname{Arg} H(i\omega)). \tag{1.26}$$

*Løsningen* (1.25) *kaldes det* stationære svar *på påvirkningen $u(t) = \cos \omega t$, og* (1.26) *er det stationære svar på påvirkningen $u(t) = \sin \omega t$.*

Sætning 1.27 viser at vi kan bestemme de stationære svar ved at finde funktionerne $|H(i\omega)|$ og $\operatorname{Arg} H(i\omega)$. Disse funktioner kendes i literaturen under følgende navne:

**Definition 1.28 (Fasekarakteristikker)** *Funktionen*

$$A(\omega) := |H(i\omega)|, \ \omega > 0, \tag{1.27}$$

*kaldes amplitudekarakteristikken for* (1.16) *og*

$$\varphi(\omega) := \operatorname{Arg} H(i\omega), \ \omega > 0, \tag{1.28}$$

*kaldes fasekarakteristikken for* (1.16)*. Under ét kaldes de to funktioner for frekvenskarakteristikker.*

Bestemmelsen af fasekarakteristikken giver anledning til nogle regnetekniske detaljer, som vi vil kommentere lidt nærmere. For et komplekst

tal $a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}$, er

$$\operatorname{Arg}(a+ib)=\begin{cases}\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}, & \text{når } a+ib \text{ ligger i 1. kvadrant,}\\ \operatorname{Arctan}\frac{b}{a}+\pi, & \text{når } a+ib \text{ ligger i 2. kvadrant,}\\ \operatorname{Arctan}\frac{b}{a}-\pi, & \text{når } a+ib \text{ ligger i 3. kvadrant,}\\ \operatorname{Arctan}\frac{b}{a}, & \text{når } a+ib \text{ ligger i 4. kvadrant.}\end{cases} \tag{1.29}$$

Ved direkte indsætning af $s=i\omega$ i $H(s)$ får man $H(i\omega)$ skrevet på formen

$$H(i\omega)=\frac{a(\omega)+ib(\omega)}{c(\omega)+id(\omega)}, \tag{1.30}$$

hvor funktionerne $a(\omega), b(\omega), c(\omega)$ og $d(\omega)$ er reelle. Så er

$$\operatorname{Arg}H(i\omega)=\operatorname{Arg}(a(\omega)+ib(\omega))-\operatorname{Arg}(c(\omega)+id(\omega))\quad(\pm 2\pi), \tag{1.31}$$

hvor $\pm 2\pi$ om nødvendigt skal benyttes for at føre resultatet ind i det korrekte interval $-\pi<\operatorname{Arg}H(i\omega)\leq\pi$. Amplitudekarakteristikken kan bestemmes af formlen

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{a(\omega)^2+b(\omega)^2}}{\sqrt{c(\omega)^2+d(\omega)^2}}. \tag{1.32}$$

Man får en god fornemmelse for funktionerne $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$ ved at plotte dem, se de relevante kommandoer i Maplekompendiet afsnit D.3.3. Informationen i fasekarakteristikkerne sammenfattes undertiden i en enkelt kurve, det såkaldte *Nyquist plot:* herved forstås den kurve man får i den komplekse plan ved at tegne punkterne $H(i\omega)$ for $\omega$ gennemløbende intervallet $]0,\infty[$ (eller et delinterval heraf). Nyquist plottet sammenfatter informationerne i plottene for $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$ i en enkelt kurve: for en given værdi af $\omega$ angiver Nyquist plottet jo selve *punktet* $H(i\omega)$, mens $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$ hver for sig kun angiver henholdsvis afstanden til $(0,0)$ og den tilhørende vinkel. Til gengæld viser Nyquist plottet ikke hvilken værdi for $\omega$ der svarer til et givet punkt på kurven.

**Eksempel 1.29** Med komponentværdierne $L=R=C=1$ tager differentialligningen (1.17) i eksempel 1.23 formen

$$\ddot{I}+\dot{I}+I=\ddot{e}+e.$$

Vi vil finde de tilsvarende frekvenskarakteristikker. Overføringsfunktionen er

$$H(s)=\frac{s^2+1}{s^2+s+1};$$

den er defineret når $s^2+s+1\neq 0$, dvs. for $s\neq\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Heraf fås, at

$$H(i\omega)=\frac{1-\omega^2}{1-\omega^2+i\omega}.$$

Amplitudekarakteristikken er således

$$A(\omega) = \frac{|1-\omega^2|}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}, \tag{1.33}$$

og fasekarakteristikken er

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}\,(1-\omega^2) - \text{Arg}\,(1-\omega^2+i\omega) \quad (\pm 2\pi).$$

Vi vil udlede et kortere udtryk for funktionen $\varphi$. For $0<\omega<1$ gælder

$$\begin{aligned} &\text{Arg}\,(1-\omega^2) = 0, \\ &\text{Arg}\,(1-\omega^2+i\omega) = \text{Arctan}\,\frac{\omega}{1-\omega^2}, \end{aligned}$$

da det komplekse tal $1-\omega^2+i\omega$ ligger i 1. kvadrant. Dermed er

$$\varphi(\omega) = -\text{Arctan}\,\frac{\omega}{1-\omega^2},\ \omega\in]0,1[. \tag{1.34}$$

Bemærk at vi i (1.34) ikke får brug for at korrigere med $\pm 2\pi$, da funktionen Arctan antager værdier i intervallet $]-\pi/2,\pi/2[$. For $\omega>1$ gælder

$$\begin{aligned} &\text{Arg}\,(1-\omega^2) = \pi, \\ &\text{Arg}\,(1-\omega^2+i\omega) = \pi + \text{Arctan}\,\frac{\omega}{1-\omega^2}, \end{aligned}$$

da det komplekse tal $1-\omega^2+i\omega$ ligger i 2. kvadrant. Dermed får vi det samme resultat for $\varphi(\omega)$ som for $\omega\in]0,1[$, og kan altså slutte at

$$\varphi(\omega) = -\text{Arctan}\,\frac{\omega}{1-\omega^2}, \quad \omega\neq 1. \tag{1.35}$$

For $\omega=1$ er

$$H(i\omega) = H(i) = 0.$$

Dermed er fasekarakteristikken $\varphi(\omega)$ ikke defineret for $\omega=1$. Se figur 1.30. Vi ser, at $\omega=1$ svarer til punktet $(0,0)$ i Nyquist plottet. Endvidere viser (1.35) at

$$\varphi(\omega)\to -\frac{\pi}{2} \text{ for } \omega\to 1^-,$$

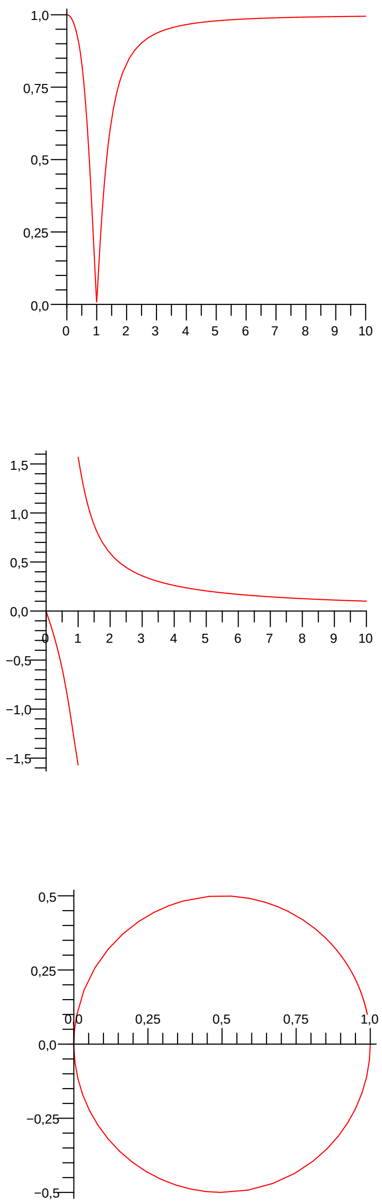
mens

$$\varphi(\omega)\to \frac{\pi}{2} \text{ for } \omega\to 1^+.$$

Denne information kan også aflæses af Nyquist plottet: for $\omega\to 1^-$ nærmer punktet $H(i\omega)$ sig $(0,0)$ via kurvestykket i 4.kvadrant, mens det for $\omega\to 1^+$ nærmer sig via kurvestykket i 1.kvadrant.

Bemærk også at $A(1)=0$; det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t)=e^{it}$ er således

$$y(t) = H(i)e^{it} = 0. \qquad \square$$




**Figur 1.30** *Amplitudekarakteristikken, fasekarakteristikken, og et Nyquist plot hørende til differentialligningen i eksempel 1.29. Nyquist plottet er tegnet for* $\omega \in [0, 10]$; *startpunktet er* $H(i0) = 1$, *og slutpunktet er* $H(10i) = \frac{-99}{-99+10i} = \frac{-99(-99-10i)}{99^2+10^2} = \frac{9801}{9901} + i\frac{990}{9901} \approx 1 + 0.1i$.

Det er nyttigt at tænke på en differentialligning af typen (1.16) som en "black box", der til et givet input $u(t)$ lader svare et output $y(t)$. Når inputtet er af formen $u(t) = \cos \omega t$ viser (1.25) at outputtet også er en harmonisk svingning: det oprindelige input er blevet "forstærket" med faktoren $A(\omega) = H(i\omega)$ (hvis $A(\omega) < 1$ er det mere korrekt at tale om en dæmpning), og faseforskudt med $\varphi(\omega) = \operatorname{Arg} H(i\omega)$. I eksempel 1.29 ses via (1.33) og (1.35), at der for $\omega = 2$ er tale om en amplitudeforstærkning på $A(2) \approx 0.83$ og en faseforskydning på $\varphi(2) \approx 0.59$. For værdier af $\omega$ tæt på 1 bevirker vores "black box" en kraftig dæmpning af signalet, da $A(\omega) << 1$. Mere konkret kunne "black boxen" f.eks. være en forstærker beregnet til musikgengivelse. I dette tilfælde ville man være interesseret i at designe den således at forstærkningsfaktoren $A(\omega)$ er (omtrent) konstant for alle frekvenser i det hørbare område.

Til slut bemærkes, at vores krav om at argumentet $\varphi(\omega)$ skal være i intervallet $]-\pi, \pi]$, undertiden leder til en funktion, der ikke er kontinuert. I fysiske sammenhænge, hvor det vides at vinklen ændrer sig kontinuert, er dette ikke hensigtsmæssigt. Derfor er der andre lærebøger, som ikke insisterer på at vinklen $\varphi(\omega)$ skal være i intervallet $]-\pi, \pi]$.

## 1.6 Ligninger med variable koefficienter

Indtil nu har vi udelukkende betragtet differentialligninger med konstante koefficienter. Men i mange anvendelser optræder også differentialligninger, hvor koefficienterne afhænger af variablen $t$; i 2.ordens-tilfældet er der altså tale om en differentialligning af formen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)y = u(t), \quad t \in I, \tag{1.36}$$

hvor $a_1, a_2$ og $u$ er givne funktioner, og $y$ er den søgte løsning. Som sædvanlig er den tilhørende homogene ligning givet ved

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)y = 0, \quad t \in I. \tag{1.37}$$

Behandling af denne type ligninger er kompliceret, og de metoder vi har beskrevet for tilfældet med konstante koefficienter kan ikke anvendes. Ofte er man ikke i stand til at opskrive en konkret løsning ved hjælp af analytiske metoder. Men *hvis* en løsning til det homogene system (1.37) kan findes, så kan man undertiden bruge nedenstående sætning til at finde den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning (1.36). Metoden kaldes *de arbitrære konstanters variationsmetode.*

**Sætning 1.31** *Antag at funktionen* $y_1$ *er løsning til den homogene ligning* (1.37)*, og at* $y_1(t) \neq 0$ *for alle* $t \in I$*. Sæt*

$$A_1(t) = \int a_1(t)dt \quad og \quad \Omega(t) = e^{A_1(t)}. \tag{1.38}$$

*Så gælder følgende:*

*(i) Den homogene ligning* (1.37) *har løsningen*

$$y_2(t) = y_1(t)\left(\int \frac{1}{y_1(t)^2\Omega(t)}\,dt\right), \tag{1.39}$$

*og funktionerne* $y_1, y_2$ *er lineært uafhængige;*

*(ii) Den fuldstændige løsning til den homogene ligning* (1.37) *kan skrives*

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

*hvor* $c_1$ *og* $c_2$ *er arbitrære konstanter.*

*(iii) Den inhomogene ligning* (1.36) *har den partikulære løsning*

$$y_{par}(t) = y_1(t)\left(\int \frac{1}{y_1(t)^2\Omega(t)}\left[\int y_1(t)\Omega(t)u(t)dt\right]dt\right). \tag{1.40}$$

*(iv) Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning* (1.36) *kan skrives*

$$y(t) = y_{par}(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

*hvor* $c_1$ *og* $c_2$ *er arbitrære konstanter.*

Ved udtrykket (1.38) for funktionen $A_1(t)$ er det nok at angive en enkelt stamfunktion; vi behøver altså ikke at tilføje en integrationskonstant. Problemet ved anvendelser af denne sætning er at bestemme løsningen $y_1$ til den homogene ligning; som nævnt kan metoderne fra teorien for differentialligninger med konstante koefficienter ikke anvendes. En brugbar løsning $y_1$ kan undertiden findes ved hjælp af potensrækkemetoden, se afsnit 7.1, eller Fourierrækkemetoden, afsnit 7.2.

**Eksempel 1.32** Vi ønsker at bestemme den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t^2}y = \frac{1}{t},\ t \in ]0,\infty[. \tag{1.41}$$

Ved indsættelse ses, at funktionen $y_1(t) = t$ er løsning til den homogene ligning svarende til (1.41). Vi kan derfor bestemme den fuldstændige løsning til (1.41) ved hjælp af sætning 1.31. Vi sætter

$$A_1(t) = \int \frac{-2}{t}\,dt = -2\ln t$$

og

$$\Omega(t) = e^{-2\ln t} = \frac{1}{t^2}.$$

Via (1.39) fås at den homogene ligning har løsningen

$$\begin{aligned} y_2(t) = y_1(t)\left(\int \frac{1}{y_1(t)^2\Omega(t)}\,dt\right) &= t\int \frac{1}{t^2}\,t^2\,dt \\ &= t\int dt \\ &= t^2. \end{aligned}$$

Tilsvarende fås via (1.40) at den inhomogene ligning har løsningen

$$\begin{aligned} y_{\text{par}}(t) &= y_1(t)\left(\int \frac{1}{y_1(t)^2\Omega(t)}\left[\int y_1(t)\Omega(t)u(t)dt\right]dt\right) \\ &= t\left(\int\left[\int \frac{1}{t^2}dt\right]dt\right) \\ &= t\left(\int\left[-\frac{1}{t}\right]dt\right) \\ &= -t\ln t. \end{aligned}$$

Dermed er den fuldstændige reelle løsning til (1.41) givet ved

$$y(t) = -t\ln t + c_1t^2 + c_2t,$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

## 1.7 Partielle differentialligninger

Vi har i dette kapitel udelukkende betragtet differentialligninger, hvor den søgte funktion $y$ afhænger af én reel variabel. I mange sammenhænge optræder der differentialligninger, der involverer funktioner af flere variable, f.eks. de tre rumlige koordinater og tiden, og deres partielle afledede. Som eksempel nævnes *den svingende streng.* Hvis en streng af længden $L$ er fastspændt i endepunkterne $x = 0$ og $x = L$ og udfører små lodrette svingninger, gælder om udsvinget $u(x,t)$ af punktet $x$ til tiden $t$ at

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < L. \tag{1.42}$$

Ligningen (1.42) kaldes også den *éndimensionelle bølgeligning.* Løsning af ligninger af denne type (og partielle differentialligninger generelt) er mere kompliceret end løsning af de ligninger vi betragtede i dette kapitel; ofte bruges f.eks. en variant af Fourierrækkemetoden, som vi diskuterer i afsnit 7.2. Vi henviser til kurset 01418 *Partielle differentialligninger og anvendt matematik,* samt lærebogen [13].

# Kapitel 2

## Systemer af differentialligninger af 1. orden

Ved den matematiske modellering af fysiske, kemiske og tekniske systemer optræder ofte mere end én ubekendt tidsafhængig størrelse. Tænk for eksempel på et antal masser, der er forbundet til hinanden og påvirket af et antal kræfter: hver masse vil da have en position og en hastighed, der varierer fra masse til masse. Man kan også tænke på et elektrisk kredsløb bestående af mere end én enkeltkreds, hvori der løber strømme af forskellige strømstyrker. I disse og lignende tilfælde benytter man de fysiske grundlove (Newtons 2.lov, impulsmomentsætningen, energisætningen, og lignende) samt visse modelantagelser (Hookes lov, Ohms lov, Kirchhoffs strøm og spændingslove,...) til at opstille flere sammenhængende differentialligninger for de ubekendte tidsafhængige funktioner, et såkaldt differentialligningssystem.

Ofte er der tale om et *lineært* differentialligningssystem. Det vil sige, at de ubekendte funktioner og deres afledede kun indgår som ubekendte i en linearkombination. Vi skal i dette kapitel præsentere de vigtigste elementer af teorien for sådanne ligninger. Vores fremstilling følger samme plan som for $n$'te ordens differentialligningen, og vi vil observere at mange resultater er helt parallelle. Som afslutning på kapitlet skal vi endvidere diskutere stabilitetsproblemer for differentialligningssystemer, et emne der blandt andet afgør om en opstillet model er hensigtsmæssig at benytte i praksis.

Vi nævner allerede nu, at der også findes fysiske systemer, der ikke kan modelleres ved hjælp af et lineært differentialligningssystem. Ofte vil man i sådanne tilfælde vælge at linearisere modellen ved at benytte en Taylorudvikling af de ikke-lineære led, og f.eks. erstatte $\sin x$ med $x$ for $x$ tæt på nul. Ofte vil man opnå fuldt tilstrækkelige resultater ved herefter at anvende de

resultater vi præsenterer i indeværende kapitel. Vi vil diskutere ulineære differentialligninger i kapitel 3.

## 2.1 Introduktion

Vi betragter et system af $n$ sammenhørende differentialligninger af 1. orden af formen

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + u_2(t), \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \dot{x}_n(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \cdots + a_{n,n}x_n(t) + u_n(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Her er $a_{rs}$, $r, s = 1, \ldots, n$ reelle tal, og $u_1, \ldots, u_n$ er givne funktioner, definerede på et interval $I$; $x_1, \ldots, x_n$ er de ubekendte funktioner vi ønsker at bestemme. Ligningerne kaldes også et *lineært differentialligningssystem af 1.orden med n ubekendte*. På matrixform skrives systemet som

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n(t) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Vi vil normalt benytte en mere kompakt notation. Vi vil således indføre *systemmatricen* $\mathbf{A}$ ved

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix},$$

og endvidere sætte

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Ved brug af denne notation kan vi skrive ligningssystemet som

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t).$$

Ofte undlader man endvidere at angive afhængigheden af variablen $t$, og skriver således systemet som

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u}. \tag{2.3}$$

En *løsning* er en vektor $\mathbf{x}$, der tilfredsstiller differentialligningssystemet. Differentialligningssystemet (2.3) kaldes *inhomogent* når $\mathbf{u}$ er forskellig fra nulfunktionen, dvs. når der findes $t \in I$ således at $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$. Det tilsvarende *homogene* ligningssystem er

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{2.4}$$

**Eksempel 2.1** Et eksempel på et inhomogent differentialligningssystem af 1.orden er

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{2}{3}x_1(t) - \dfrac{4}{3}x_2(t) + \cos t \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{3}x_1(t) - \dfrac{1}{3}x_2(t) + \sin t. \end{cases} \tag{2.5}$$

På matrixform har ligningssystemet formen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Vi viser nu at vektorfunktionen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

er en løsning. Ved differentiation af koordinatfunktionerne i (2.6) fås at

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t + \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Ved indsættelse af (2.6) i udtrykkene på højre side i (2.5) fås

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x_1(t) - \frac{4}{3}x_2(t) + \cos t &= -\frac{2}{3}(2\cos t + \sin t) - \frac{4}{3}(\sin t - \cos t) + \cos t \\ &= -2\sin t + \cos t = \dot{x}_1(t), \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1(t) - \frac{1}{3}x_2(t) + \sin t &= \frac{1}{3}(2\cos t + \sin t) - \frac{1}{3}(\sin t - \cos t) + \sin t \\ &= \cos t + \sin t = \dot{x}_2(t). \end{aligned}$$

Funktionen i (2.6) opfylder altså ligningen (2.5), som ønsket. Senere i dette kapitel vil vi diskutere generelle metoder til at bestemme løsninger til ligninger af den angivne type. □

Vi vil i dette kursus lægge mere vægt på behandlingen af systemer af 1.ordens differentialligninger end på $n$'te ordens ligningen. En af grundene hertil

er, at en $n$'te ordens differentialligning altid kan skrives om til et system af 1.ordens differentialligninger. Betragter vi en $n$'te ordens differentialligning

$$y^{(n)}(t) + b_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1}y'(t) + b_n y(t) = u(t), \tag{2.7}$$

kan vi nemlig indføre et sæt nye variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ved at sætte

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = y'(t), \ldots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t). \tag{2.8}$$

Definitionen af funktionerne $x_1$ og $x_2$ viser nu at $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, og tilsvarende at

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t), \cdots, \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t).$$

Endvidere viser ligningen (2.7) at

$$y^{(n)}(t) = -b_n y(t) - b_{n-1}y'(t) - \cdots - b_2 y^{(n-2)}(t) - b_1 y^{(n-1)}(t) + u(t),$$

hvilket i termer af de nye variable kan udtrykkes som

$$\dot{x}_n(t) \quad = -b_n x_1(t) - b_{n-1}x_2(t) - \cdots - b_2 x_{n-1}(t) - b_1 x_n(t) + u(t).$$

Alt i alt har vi hermed vist at de nye variable opfylder ligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) = -b_n x_1(t) - b_{n-1}x_2(t) - \cdots - b_1 x_n(t) + u(t). \end{cases} \tag{2.9}$$

Vi ser, at dette er et system af $n$ 1. ordens differentialligninger, som på matrixform kan skrives

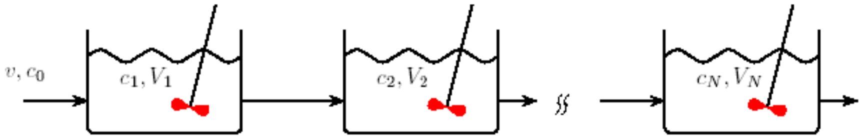
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \cdot & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Enhver løsning $y(t)$ til (2.7) kan via (2.8) bruges til at angive en løsning $\mathbf{x}$ til dette differentialligningssystem. Omvendt vil enhver løsning $\mathbf{x}$ til differentialligningssystemet have den egenskab, at førstekoordinaten $x_1(t)$ er en løsning til (2.7). I den forstand er $n$'te ordens differentialligninger altså blot et specialtilfælde af 1.ordens differentialligningssystemer med $n$ ubekendte. Endvidere kan alle sætninger for $n$'te ordens differentialligninger fra sidste kapitel "oversættes" til mere generelle sætninger, der er gyldige for systemer (2.3) med vilkårlige reelle matricer $\mathbf{A}$ og påvirkninger $u(t)$.

Af hensyn til senere nævner vi allerede nu, at vi for generelle systemer af formen (2.4) vil indføre et karakteristisk polynomium i afsnit (2.2); for systemet hørende til $n$'te ordens ligningen (2.7) er dette polynomium identisk med det karakteristiske polynomium for (2.7) som blev indført i afsnit 1.2.

**Eksempel 2.2** Strømningsmønstret i en kemisk reaktor modelleres ofte med en *tank i serie* model, hvor reaktoren opfattes som bestående af $N$ seriekoblede tanke, og produktstrømmen fra tank $i$ er fødestrøm til tank $i+1,\ i=1,\ldots,N-1$. De $N$ tanke antages lige store, med volumen $V/N$, hvor $V$ betegner volumet af den givne reaktor. Strømningshastigheden $v$ gennem tankene antages at være konstant.

Til tiden $t=0$ tilføres reaktoren (altså tank 1 i modellen) momentant $M$ mol af et stof, som ikke er tilstede på forhånd, og heller ikke dannes eller nedbrydes i løbet af processen. Lad $c_i(t)$ betegne koncentrationen af dette stof i tank $i$ til tiden $t$.




Koncentrationen i tankene til starttidspunktet er således

$$c_1(0)=\frac{NM}{V} \text{ og } c_i(0)=0,\ i=2,\ldots,N.$$

Ved at opstille en massebalance over hver tank kan det vises, at koncentrationen af stoffet i de $N$ tanke beskrives ved følgende system af differentialligninger:

$$\begin{pmatrix}\dot c_1(t)\\ \dot c_2(t)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \dot c_N(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{Nv}{V} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0\\ \frac{Nv}{V} & -\frac{Nv}{V} & 0 & \cdot & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \frac{Nv}{V} & -\frac{Nv}{V} & 0\\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \frac{Nv}{V} & -\frac{Nv}{V}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ c_N(t)\end{pmatrix}.$$

Der er således tale om et lineært homogent differentialligningssystem af 1.orden med $N$ ubekendte. □

## 2.2 Den homogene ligning

I dette afsnit beskrives, hvordan man bestemmer $n$ lineært uafhængige løsninger til den homogene ligning

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{2.10}$$

Lad $\mathbf{I}$ betegne enhedsmatricen. Vi minder om, at et tal $\lambda$ er *egenværdi* for matricen $\mathbf{A}$ når $\lambda$ er rod i det *karakteristiske polynomium*

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).$$

De tilsvarende *egenvektorer* $\mathbf{v}$ bestemmes af ligningen

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Løsning af den homogene ligning (2.10) foregår ved brug af *egenværdimetoden,* som er baseret på følgende resultat.

**Sætning 2.3 (Egenværdimetoden)** *Hvis $\lambda$ er en reel eller kompleks egenværdi for $\mathbf{A}$ og $\mathbf{v}$ er en tilsvarende (egentlig) egenvektor, da har* (2.10) *løsningen*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}.$$

*Løsninger, der svarer til lineært uafhængige egenvektorer (f.eks. egenvektorer hørende til forskellige egenværdier), er lineært uafhængige.*

**Bevis for den første påstand:** Antag at $\lambda$ er en egenværdi for $\mathbf{A}$ med egenvektor $\mathbf{v}$. Sæt $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$; så er

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{\lambda t}\lambda\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

For beviset for sætningens anden halvdel henvises til appendiks A.4. □

Som for $n$'te-gradsligningen gælder, at hvis $\lambda = a + i\omega$ er rod i karakterligningen, så er også $\overline{\lambda} = a - i\omega$ en rod. Hvis vi har fundet en egenvektor hørende til egenværdien $\lambda = a + i\omega$ kan vi bruge det følgende resultat til hurtigt at bestemme en egenvektor hørende til $\lambda = a - i\omega$. For beviset henvises til opgave 914.

**Lemma 2.4** *Antag at vektoren $\mathbf{v} = \operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}$ er en egenvektor for matricen $\mathbf{A}$, hørende til egenværdien $\lambda = a + i\omega$. Så er $\overline{\mathbf{v}} = \operatorname{Re}\mathbf{v} - i\operatorname{Im}\mathbf{v}$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda = a - i\omega$.*

Lad os anvende sætning 2.3 og lemma 2.4 på et konkret eksempel:

**Eksempel 2.5** Betragt systemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

På matrixform tager systemet formen

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Vi betragter derfor matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

som har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Rødderne er $\lambda_1 = 1 + i$ og $\lambda_2 = 1 - i$. Egenvektoren $\mathbf{v}$ svarende til egenværdien $\lambda_1 = 1 + i$ bestemmes af ligningen

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Vektoren $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ er altså en egenvektor hørende til egenværdien $\lambda_1$. Ifølge lemma 2.4 er den konjugerede vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ derfor egenvektor hørende til $\lambda_2$. Ifølge sætning 2.3 har ligningssystemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dermed de lineært uafhængige løsninger

$$\mathbf{x}(t) = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{x}(t) = e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Samtlige komplekse løsninger til differentialligningen er dermed

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. □

Analogt til sætning 1.5 gælder, at løsningerne til den homogene 1.ordens differentialligning med $n$ ubekendte udgør et $n$-dimensionalt vektorrum. Vi ønsker normalt at kunne angive alle reelle løsninger, men med udgangspunkt i sætning 2.3 er der to problemstillinger vi skal have afklaret:

- Det karakteristiske polynomium kan have komplekse rødder, som leder til komplekse løsninger. Hvordan kan vi i dette tilfælde bestemme de reelle løsninger?

- Sætning 2.3 leder kun til den fuldstændige løsning hvis vi kan finde $n$ lineært uafhængige egenvektorer. Det er altså endnu ikke afklaret hvorledes man finder alle løsninger når visse rødder optræder med multiplicitet.

I resten af dette afsnit diskuteres disse problemstillinger i detaljer. Svarerende til sætning 1.9 formulerer vi først en sætning, der viser hvorledes man bestemmer reelle løsninger hvis en egenværdi er kompleks. Denne sætning 2.6 udgør sammen med sætning 2.3 den såkaldte *egenværdimetode*. Hvis $\mathbf{A}$ har $n$ forskellige egenværdier kan man ved hjælp af disse sætninger opskrive $n$ lineært uafhængige løsninger til (2.10).

**Sætning 2.6 (Egenværdimetoden)** *Et sæt reelle løsninger til den homogene ligning $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ bestemmes på følgende måde:*

*(a) For hver reel egenværdi med en tilhørende reel og egentlig egenvektor $\mathbf{v}$ opskrives løsningen*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}.$$

*(b) Komplekse egenværdier optræder i par $a \pm i\omega$. Vælg en egentlig egenvektor $\mathbf{v}$ hørende til egenværdien $\lambda = a + i\omega$, og opskriv løsningerne*

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}\,(e^{\lambda t}\mathbf{v}) = e^{at}(\cos\omega t\ \mathrm{Re}\,\mathbf{v} - \sin\omega t\ \mathrm{Im}\,\mathbf{v}) \tag{2.11}$$

*og*

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{Im}\,(e^{\lambda t}\mathbf{v}) = e^{at}(\sin\omega t\ \mathrm{Re}\,\mathbf{v} + \cos\omega t\ \mathrm{Im}\,\mathbf{v}) \tag{2.12}$$

**Bevis:** Beviset for sætningen diskuteres i appendiks A.4 og opgave 914. Her nøjes vi med at udlede det eksplicitte udtryk for løsningerne som angivet under (b). Hvis egenvektoren $\mathbf{v}$ skrives som en sum af real og imaginærdel, $\mathbf{v} = \mathrm{Re}\,\mathbf{v} + i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{v}$, så fås ved brug af formlen (1.11) at

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}\mathbf{v} &= e^{at}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\,(\mathrm{Re}\,\mathbf{v} + i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{v}) \\ &= e^{at}(\cos\omega t\ \mathrm{Re}\,\mathbf{v} - \sin\omega t\ \mathrm{Im}\,\mathbf{v}) + ie^{at}(\sin\omega t\ \mathrm{Re}\,\mathbf{v} + \cos\omega t\ \mathrm{Im}\,\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Ved at udtage realdelen og imaginærdelen fås præcis de løsninger der angives i (b). □

Bemærk, at det i (b) er nok at finde en egenvektor $\mathbf{v}$ for egenværdien $\lambda = a + i\omega$: de to løsninger hørende til parret $a \pm i\omega$ bliver nemlig erstattet af de to løsninger i (2.11) og (2.12), helt parallelt til situationen for $n$'te ordens differentialligningen.

**Eksempel 2.7** Vi vil finde samtlige reelle løsninger til differentialligningssystemet i eksempel 2.5,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

For egenværdien $\lambda = 1 + i$ fandt vi egenvektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

via sætning 2.6, dvs. formlerne (2.11) og (2.12), fås således løsningerne

$$\mathbf{x}(t) = e^t \left( \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{x}(t) = e^t \left( \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Den fuldstændige reelle løsning er hermed

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

**Eksempel 2.8** Antag at $\omega \neq 0$. Ved hjælp af egenværdimetoden vises (gør det!) at differentialligningen

$$\dot{\mathbf{x}} \quad = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

har den fuldstændige reelle løsning

$$\mathbf{x}(t) \quad = c_1 \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

Det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

er et polynomium af $n$'te grad, hvor koefficienten til $\lambda^n$ er $(-1)^n$. Det kan således skrives som et produkt af $n$ polynomier af formen $\lambda_n - \lambda$, hvor tallene $\lambda_n$ netop er egenværdierne. Antallet af gange en given egenværdi optræder i denne opskrivning kaldes egenværdiens *algebraiske multiplicitet,* se definition 1.13. Hvis vi for hver egenværdi $\lambda$ med algebraisk multiplicitet $p$ er i stand til at opskrive $p$ lineært uafhængige egenvektorer, så leder løsningerne angivet i sætning 2.3 til ialt $n$ lineært uafhængige løsninger til (2.10): den fuldstændige løsning til (2.10) fås nu ved at danne linearkombinationer af disse.

Der er dog også tilfælde hvor det er mere kompliceret at finde samtlige løsninger – nemlig hvis en egenværdi $\lambda$ med algebraisk multiplicitet $p$ kun leder til $q < p$ lineært uafhængige egenvektorer. I den forbindelse har vi brug for begrebet *geometrisk multiplicitet:*

**Definition 2.9 (Geometrisk multiplicitet)** *Ved den geometriske multiplicitet $q$ af en egenværdi $\lambda$ forstås dimensionen af nulrummet for matricen* $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$.

Bemærk, at den geometriske multiplicitet $q$ af en egenværdi netop er antallet af lineært uafhængige egenvektorer hørende til egenværdien $\lambda$. Et eksempel på beregning af den geometriske multiplicitet findes i eksempel 2.12.

Hvis der optræder egenværdier med $q < p$ bruges følgende resultat til bestemmelse af lineært uafhængige løsninger:

**Sætning 2.10 (Lineært uafhængige løsninger til $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$)**

*(a) Antag, at $\lambda$ er en reel egenværdi for $A$ med algebraisk multiplicitet $p \geq 2$ og geometrisk multiplicitet $q < p$. Da findes vektorer $\mathbf{b}_{jk} \in \mathbb{R}^n$ således at funktionerne*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1}(t) &= \mathbf{b}_{11}e^{\lambda t}\\
\mathbf{x_2}(t) &= \mathbf{b}_{21}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{22}te^{\lambda t}\\
&\cdot\\
&\cdot\\
\mathbf{x_p}(t) &= \mathbf{b}_{p1}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{p2}te^{\lambda t} + \cdots + \mathbf{b}_{pp}t^{p-1}e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

*er lineært uafhængige reelle løsninger til systemet* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

*(b) Antag, at $a \pm i\omega$ er et par komplekst konjugerede egenværdier med algebraisk multiplicitet $p \geq 2$ og geometrisk multiplicitet $q < p$. Lad $\lambda := a + i\omega$. Da findes vektorer $\mathbf{b}_{jk} \in \mathbb{C}^n$ således at funktionerne*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1}(t) &= \mathrm{Re}\,(\mathbf{b}_{11}e^{\lambda t})\\
\mathbf{x_2}(t) &= \mathrm{Re}\,(\mathbf{b}_{21}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{22}te^{\lambda t})\\
&\cdot\\
&\cdot\\
\mathbf{x_p}(t) &= \mathrm{Re}\,(\mathbf{b}_{p1}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{p2}te^{\lambda t} + \cdots + \mathbf{b}_{pp}t^{p-1}e^{\lambda t})\\
\mathbf{x_{p+1}}(t) &= \mathrm{Im}\,(\mathbf{b}_{11}e^{\lambda t})\\
\mathbf{x_{p+2}}(t) &= \mathrm{Im}\,(\mathbf{b}_{21}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{22}te^{\lambda t})\\
&\cdot\\
&\cdot\\
\mathbf{x_{2p}}(t) &= \mathrm{Im}\,(\mathbf{b}_{p1}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{p2}te^{\lambda t} + \cdots + \mathbf{b}_{pp}t^{p-1}e^{\lambda t})
\end{aligned}$$

*er lineært uafhængige reelle løsninger til systemet* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Beviset for den lineære uafhængighed af løsningerne i sætning 2.10 (b) diskuteres i appendiks A.4. For både (a) og (b) gælder, at $\mathbf{b}_{11}$ vælges som en egentlig egenvektor hørende til egenværdien $\lambda$; man kan endvider vise, at vektoren $\mathbf{b}_{22}$ også kan vælges som en egenvektor hørende til egenværdien

$\lambda$, se eksempel 2.12. De øvrige vektorer $\mathbf{b}_{jk}$ bestemmes ved indsættelse i differentialligningen.

Helt i stil med overvejelserne i kapitel 1 leder sætning 2.10 til en metode til bestemmelse af samtlige reelle løsninger til ligningssystemet (2.10):

**Sætning 2.11 (Fuldstændige reelle løsning til** (2.10)**)** *Den fuldstændige reelle løsning til det homogene differentialligningssystem* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *kan bestemmes på følgende måde:*

*(i) For hver reel egenværdi* $\lambda$ *opskrives løsningerne i sætning 2.10 (a);*

*(ii) For hvert par* $a \pm i\omega$ *af komplekst konjugerede egenværdier opskrives løsningerne i sætning 2.10 (b).*

*Den fuldstændige reelle løsning til differentialligningssystemet fås ved at danne linearkombinationer af de fundne* $n$ *løsninger, med reelle koefficienter.*

I eksempel 2.31 vender vi tilbage til løsningerne angivet i sætning 2.11, og illustrerer løsningernes grafiske udseende både i tilfælde af reelle og komplekse egenværdier.

**Eksempel 2.12** Vi betragter differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

På matrixform har ligningssystemet formen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

så vi betragter matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Den eneste egenværdi er således $\lambda = 2$, der har algebraisk multiplicitet $p = 2$. For at finde egenvektorerne betragtes ligningen $\mathbf{A}\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$, dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0};$$

denne ligning har løsningerne

$$\mathbf{v} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Egenværdien $\lambda = 2$ har altså geometrisk multiplicitet $q = 1$. Via sætning 2.3 kan vi opskrive løsningen

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{2.13}$$

Jævnfør sætning 2.10 søger vi nu endnu en løsning, på formen

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{b}_2 t e^{2t}.$$

Her er

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = 2\mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{b}_2 e^{2t} + 2\mathbf{b}_2 t e^{2t}.$$

Ved indsættelse i differentialligningssystemet ses at $\mathbf{x}_2$ er løsning hvis

$$2\mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{b}_2 e^{2t} + 2\mathbf{b}_2 t e^{2t} = \mathbf{A}\mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{A}\mathbf{b}_2 t e^{2t} \text{ for alle } \ t \in \mathbb{R},$$

dvs. hvis

$$2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_2 t = \mathbf{A}\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}\mathbf{b}_2 t \text{ for alle } \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Ved at sætte $t = 0$ i (2.14) ses at

$$\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2; \tag{2.15}$$

ved herefter at sætte $t = 1$ i (2.14) ses at

$$\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{b}_2. \tag{2.16}$$

Ligningen i (2.16) viser at $\mathbf{b}_2$ skal være en egenvektor hørende til egenværdien $\lambda = 2$, så vi kan f.eks vælge

$$\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ligningen i (2.15) kan skrives som $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$, hvor vi nu kender $\mathbf{b}_2$: ligningen har dermed formen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

som f.eks. har løsningen

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hermed bliver

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{b}_2 t e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t},$$

som er lineært uafhængig med løsningen $\mathbf{x}_1(t)$ i (2.13). Differentialligningen har således den fuldstændige reelle løsning

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) &= c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{2t}\right)\\ &= c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{2t},\end{aligned}$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bemærk, at der *ikke* findes en egentlig løsning af formen $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}_2te^{2t}$: en løsning af denne form ville jo svare til at $\mathbf{b}_1 = 0$, men dermed ville vi også have $\mathbf{b}_2 = 0$ ifølge (2.16). □

## 2.3 Fundamentalmatricen

Vi skal nu formulere resultaterne angående løsningerne til det homogene ligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ved hjælp af den såkaldte *fundamentalmatrix.* Den indføres som følger:

**Definition 2.13 (Fundamentalmatrix)** *Til ethvert sæt af $n$ lineært uafhængige løsninger $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ til det homogene ligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ knyttes en $n \times n$ fundamentalmatrix*

$$\mathbf{\Phi}(t) := (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)),\ \ t \in I. \tag{2.17}$$

*Søjlerne i $\Phi(t)$ består altså af vektorerne $\mathbf{x}_i(t),\ i = 1, \ldots, n$.*

Vi bemærker at man på mange forskellige måder kan vælge $n$ lineært uafhængige løsninger til den homogene ligning $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Som konsekvens heraf er fundamentalmatricen *ikke* entydigt bestemt.

**Eksempel 2.14** Antag at $\omega \neq 0$. Differentialligningen

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

har ifølge eksempel 2.8 de lineært uafhængige løsninger

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix}-\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}.$$

Dermed er en fundamentalmatrix givet ved

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix}\sin\omega t & -\cos\omega t\\ \cos\omega t & \sin\omega t\end{pmatrix}.$$

En anden fundamentalmatrix er

$$\begin{pmatrix}-\cos\omega t & \sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$$

□

Den følgende sætning vil spille en vigtig rolle i forbindelse med løsning af inhomogene differentialligningssystemer.

**Sætning 2.15** *Lad* $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ *være et sæt af* $n$ *lineært uafhængige løsninger til det homogene differentialligningssystem* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$*. Da er den tilhørende fundamentalmatrix* $\mathbf{\Phi}(t)$ *regulær (dvs. invertibel) for alle* $t \in I$*.*

**Bevis:** Det er velkendt fra lineær algebra at en $n \times n$ matrix bestående af $n$ lineært uafhængige søjler er invertibel. □

Fundamentalmatricen er et godt hjælpemiddel til at opskrive alle løsninger eller én partikulær løsning på en bekvem form:

**Sætning 2.16**

*(i) Enhver fundamentalmatrix* $\mathbf{\Phi}(t)$ *for det homogene differentialligningssystem* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *er en differentiabel matrixfunktion, som opfylder matrixligningen*

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t). \tag{2.18}$$

*(ii) Den fuldstændige reelle løsning til* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *kan ved hjælp af en vilkårlig reel fundamentalmatrix* $\mathbf{\Phi}(t)$ *skrives som*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c},\ \ \mathbf{c} = (c_1\ c_2\ \ldots\ c_n)^T \in \mathbb{R}^n, \tag{2.19}$$

*og den partikulære løsning, for hvilken* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$*, kan skrives som*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)[\mathbf{\Phi}(t_0)]^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{2.20}$$

Vi vil ikke gennemgå beviset (se opgave 923). I sætning 7.16 vil vi finde et alternativt udtryk for de angivne løsninger via den såkaldte eksponentialmatrix.

## 2.4 Den inhomogene ligning

Vi tager nu fat på behandlingen af den inhomogene ligning

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u}, \tag{2.21}$$

hvor $\mathbf{u}$ er en vektor bestående af $n$ reelle (eller komplekse) kontinuerte funktioner, definerede på et interval $I$. Denne ligning har altid uendelig mange løsninger. Der gælder nemlig følgende vigtige eksistens- og entydighedssætning.

**Sætning 2.17 (Eksistens- og entydighedssætningen)** *For ethvert* $t_0 \in I$ *og enhver vektor* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ *findes præcis én løsning til* (2.21) *for hvilken det gælder at*

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{v}.$$

De på forhånd fastlagte værdier af vektorerne $\mathbf{x}(t_0)$ kaldes *begyndelses-betingelser* i $t_0$.

Når et lineært fysisk system skal modelleres matematisk, kan man vælge mellem at beskrive systemet via en differentialligning af $n$'te orden som i (2.7) eller et system af $n$ første ordens differentialligninger som i (2.9). De begyndelsesbetingelser, der skal fastlægges i henhold til eksistens- og entydighedssætningerne er $(y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0))$ i det første tilfælde, og $\mathbf{x}(t_0)$ i det andet. I tilfældet af f.eks. et elektrisk kredsløb vil variablene normalt repræsentere spændinger eller strømme i kredsløbet. Mens begyndelsesbetingelser vedrørende $\mathbf{x}(t_0)$ direkte angiver begyndelsesværdier for visse strømme og spændinger, indeholder begyndelsesbetingelser vedrørende $(y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0))$ høje afledede af strømme og spændinger. Disse afledede behøver ikke at have nogen klar fysisk betydning. Dette forhold er en grund til, at man ved principielle overvejelser tit foretrækker at modellere f.eks. kredsløb ved systemer af 1.ordens differentialligninger.

Hvad angår strukturelle egenskaber ved løsningerne til den inhomogene ligning (2.21) gælder der sætninger svarende til superpositionsprincippet og sætning 1.20. Det overlades til læseren at formulere de tilsvarende sætninger for systemer. Konkret bestemmelse af partikulære løsninger kan undertiden foretages ved hjælp af gættemetoden, som vi her illustrerer med et eksempel. Princippet er det samme som vi beskrev for $n'$te-ordensligningen, nemlig at man for en given påvirkning $\mathbf{u}(t)$ gætter på en løsning af samme form. Hvis koordinaterne i vektoren $\mathbf{u}(t)$ består af polynomier, vil vi således gætte på en løsning, hvor koordinaterne ligeledes er polynomier. Lad os illustrere metoden med et eksempel.

**Eksempel 2.18** Vi vil finde samtlige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + t \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) + t + 1. \end{cases}$$

På matrixform har ligningssystemet formen

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Vi gætter derfor på en løsning af formen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t.$$

Dermed er $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}$. Ved indsættelse i (2.22) ses at vi har en løsning hvis og kun hvis

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{a} + \mathbf{b}t) + \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

Idet

$$\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kan vi skrive betingelsen for en løsning som

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{a} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{b} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ved at samle de led der involverer $t$ ses at dette er ensbetydende med at

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \tag{2.23}$$

Dette skal være opfyldt for alle $t \in \mathbb{R}$. Ved at sætte $t = 0$ ses, at så må

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Indsættes dette i (2.23) ses endvidere at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Denne ligning har løsningen

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

indsættes dette i (2.24) fås ligningen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

med løsningen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hermed har vi vist at differentialligningssystemet har løsningen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I eksempel 2.7 har vi fundet samtlige reelle løsninger til den tilsvarende homogene ligning. Ved addition af disse løsninger fås nu, at samtlige reelle løsninger til den givne inhomogene ligning er givet ved

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Lad os afslutningsvist benytte fundamentalmatricen til at formulere et udtryk for løsningerne til det inhomogene ligningssystem af 1.orden med $n$ ubekendte. Resultatet er kendt under navnet *den generelle løsningsformel.*

**Sætning 2.19 (Den generelle løsningsformel)** *Lad* $\mathbf{\Phi}(t)$ *være en vilkårlig reel fundamentalmatrix hørende til det homogene differentialligningssystem* (2.4) *med en reel påvirkning* $\mathbf{u}$, *og vælg* $t_0 \in I$ *vilkårligt. Da gælder følgende:*

*(i) Samtlige reelle løsninger til det lineære, inhomogene differentialligningssystem* (2.21) *er givet på formen*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c} + \mathbf{\Phi}(t) \int_{t_0}^{t} [\mathbf{\Phi}(\tau)]^{-1} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \in I, \tag{2.25}$$

*med* $\mathbf{c} = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

*(ii) Den partikulære løsning til* (2.21) *med* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *er givet ved*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)[\mathbf{\Phi}(t_0)]^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}(t) \int_{t_0}^{t} [\mathbf{\Phi}(\tau)]^{-1} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \in I. \tag{2.26}$$

Sætningen kan vises ved hjælp af et antal delskridt, se opgave 920.

Baseret på kendskab til to lineært uafhængige løsninger til en homogen 2.ordens differentialligning kan man bruge den generelle løsningsformel til at opskrive løsningerne til den tilsvarende inhomogene ligning:

**Eksempel 2.20** Vi ønsker at løse differentialligningen

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = q(t), \text{ hvor } a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Vi antager, at vi har fundet to lineært uafhængige løsninger $y_1(t), y_2(t)$ til den homogene ligning

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = 0;$$

dette gøres som beskrevet i afsnit 1.2. Lad os nu se på (2.27) udtrykt som et system, som vi gjorde på side 30. Vi sætter altså $x_1(t) = y(t), \ x_2(t) = \dot{y}(t)$ og får systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q(t) \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Her er $[y_1(t) \ \ \dot{y}_1(t)]^T$ og $[y_2(t) \ \ \dot{y}_2(t)]^T$ to lineært uafhængige løsninger til det homogene system

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

som derfor har en fundamentalmatrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Idet vi sætter $W(t) = \det(\mathbf{\Phi}(t))$ (denne betegnes normalt som Wronski-determinanten), har vi for den inverse af fundamentalmatricen, at

$$[\mathbf{\Phi}(t)]^{-1} = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} \dot{y}_2(t) & -y_2(t) \\ -\dot{y}_1(t) & y_1(t) \end{pmatrix}$$

og

$$[\mathbf{\Phi}(t)]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ q(t) \end{pmatrix} = \frac{q(t)}{W(t)} \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}.$$

Ifølge den generelle løsningsformel har (2.28) da den fuldstændige løsning

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \frac{q(\tau)}{W(\tau)} \begin{pmatrix} -y_2(\tau) \\ y_1(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right) \tag{2.29}$$

Den fuldstændige løsning til (2.27) fås nu som førstekoordinaten af løsningen (2.29). Det vil sige

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \\ &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{-y_2(\tau)q(\tau)}{W(\tau)} d\tau + y_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(\tau)q(\tau)}{W(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

□

## 2.5 Systemer med variable koefficienter

Indtil nu har vi udelukkende betragtet systemer af differentialligninger med konstante koefficienter. Men i mange anvendelser optræder også systemer, hvor de optrædende koefficienter er kontinuerte funktioner af variablen $t$: det vil sige, systemer af formen

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + u_2(t), \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + u_n(t), \end{cases} \tag{2.30}$$

hvor $a_{rs}$ og $u_1, \ldots, u_n$ er givne funktioner, og $x_1, \ldots, x_n$ er de ubekendte funktioner vi ønsker at bestemme. På matrixform skrives systemet som

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \tag{2.31}$$

hvor matricen $\mathbf{A}(t)$ nu afhænger af variablen $t$.

Det skal bemærkes, at løsning af denne type systemer er væsentligt mere kompliceret end tilfældet med konstante koefficienter; specielt må man aldrig forledes til at benytte egenværdimetoden. Faktisk er man ofte

i den situation, at man ikke er i stand til at opskrive konkrete løsninger via de sædvanlige funktioner. For de tilfælde hvor konkrete løsninger findes, vil elektroniske regneprogrammer som f.eks. Maple kunne finde dem væsentligt mere effektivt og smertefrit end vi vil kunne gøre ved hjælp af teoretiske metoder, og vi vil derfor ikke gå ind på eksplicit løsning af systemet (2.30). Men på den anden side er det vigtigt at have teoretisk viden om *strukturen* af løsningsrummet til (2.30), og her er situationen mere gunstig: de teoretiske resultater vi har diskuteret angående strukturen af løsningsrummet for systemer med konstante koefficienter gælder også for systemer med variable koefficienter. Specielt nævnes, at

- eksistens- og entydighedssætningen gælder;
- løsningsrummet til (2.30) er $n$-dimensionalt;
- fundamentalmatricen kan indføres nøjagtigt som i tilfældet med konstante koefficienter; og ved hjælp af denne kan løsningerne til den homogene ligning beskrives som i sætning 2.16.

## 2.6 Overføringsfunktioner for systemer

De differentialligningssystemer vi har betragtet i dette afsnit har haft $n$ ubekendte variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$. I praksis er man ofte kun interesseret i at beregne en enkelt af variablene $x_i$, eller evt. en linearkombination af variablene $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Endvidere er påvirkningen $\mathbf{u}$ ofte en skalær størrelse $u$ (f.eks. en kraft) der skal ganges på en bestemt vektor (der f.eks. beskriver en retning). Herved ledes man til at betragte differentialligningssystemer af 1.orden med $n$ ubekendte af formen

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y = \mathbf{d}^\top \mathbf{x}, \end{cases} \tag{2.32}$$

hvor $u : I \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion, og $\mathbf{d}$ og $\mathbf{b}$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$. For systemet (2.32) er $y$ *løsningen,* og $u$ kaldes *påvirkningen.* Bemærk at man kan bestemme $y$ ved at løse differentialligningen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, og herefter indsætte $\mathbf{x}$ i udtrykket $y = \mathbf{d}^\top \mathbf{x}$. For specielle valg af påvirkningen $u$ vil vi i dette afsnit introducere en metode, der *direkte* leder til en løsning $y$. Metoden er helt parallel med vores fremgangsmåde for $n$'te-ordens differentialligningen i afsnit 1.4.

Det tilsvarende homogene system fås ved at man sætter $u(t) = 0$. Det gælder da igen, at når $y_0(t)$ er løsning i $y$ og $y_{\mathrm{H}}$ betegner alle homogene løsninger i $y$, da er $y = y_0 + y_{\mathrm{H}}$ samtlige løsninger i $y$.

Som eksempel på relevansen af systemer af typen (2.32) nævnes, at løsning af en $n$'te ordens differentialligning netop leder til et system af denne form når det omskrives som i afsnit 2.1: mere præcist har vi jo

omskrevet en ligning af formen

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}y' + b_n y = u,$$

til et system, hvor den søgte løsning $y$ er løsningsvektorens førstekoordinat, se (2.8). Dette betyder netop, at

$$y = x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = \mathbf{d}^T \mathbf{x},$$

hvor

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Undertiden er det hensigtsmæssigt at opfatte ligningen (2.32) som en *afbildning*, der afbilder en *påvirkning* $u$ (og et sæt begyndelsesbetingelser) på et *svar* $y$, der er løsningen til ligningssystemet. For sådanne ligninger kan vi indføre en overføringsfunktion helt som vi gjorde for $n$'te ordens ligningen. Ved at anvende påvirkningen $u(t) = e^{st}$ kan vi ved anvendelse af gættemetoden vise (se opgave 915), at når

$$\det(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) \neq 0,$$

så findes der en og kun én løsning i $\mathbf{x}$ af formen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{st}; \tag{2.33}$$

løsningen fås for

$$\mathbf{x}_0 = -(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}. \tag{2.34}$$

Ved indsættelse af $\mathbf{x}$ i ligningen $y = \mathbf{d}^\top \mathbf{x}$ fås herved løsningen

$$y(t) = H(s)e^{st}, \tag{2.35}$$

hvor

$$H(s) := -\mathbf{d}^\top (\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}. \tag{2.36}$$

Dette resultat er helt parallelt med hvad vi fandt for $n$'te ordens ligningen i afsnit 1.4 – vi skal blot være opmærksomme på at funktionen $H(s)$ defineres ved forskellige udtryk i de to tilfælde. Vi vil igen kalde løsningen (2.35) for det *stationære svar* hørende til påvirkningen $u(t) = e^{st}$. Funktionen i (2.36) kaldes *overføringsfunktionen* for (2.32). Som for overføringsfunktionen hørende til n'te ordens differentialligningen skal man også her angive definitionsmængden: overføringsfunktionen (2.36) er defineret for de værdier af $s \in \mathbb{C}$ for hvilke $\det(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) \neq 0$.

Vores overvejelser viser eksistensdelen af følgende sætning:

**Sætning 2.21 (Stationære svar)** *Når man i* (2.32) *sætter* $u(t) = e^{st}$*, hvor* $s$ *ikke er rod i det karakteristiske polynomium for* $\mathbf{A}$*, da har* (2.32) *en og kun én løsning af formen*

$$y(t) = H(s)e^{st}. \tag{2.37}$$

*Denne løsning fås når*

$$H(s) = -\mathbf{d}^\top(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}.$$

Entydigheden af en løsning $y$ af formen (2.37) følger af at samtlige løsninger til den inhomogene ligning fås ved til en partikulær løsning at addere samtlige løsninger til den homogene ligning, se sætning 1.20: ingen af løsningerne til den homogene ligning har nemlig formen $Ce^{st}$ for samme $s$-værdi.

Da vi i eksempler og opgaver hyppigt betragter systemer af 1.orden med 2 ubekendte minder vi om, at når

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

og $\det(\mathbf{A}) = ad - bc \neq 0$, da er $\mathbf{A}$ invertibel, og

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

**Eksempel 2.22** Vi vil finde overføringsfunktionen for differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Med de tidligere benyttede betegnelser er

$$\mathbf{A} - s\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -4 - s & 0 \\ 1 & -1 - s \end{pmatrix}$$

hvoraf

$$\det(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) = (-4 - s)(-1 - s) = (s + 1)(s + 4).$$

Idet vi benytter formel (2.38) får vi, at når $s \neq -1$ og $s \neq -4$, da er

$$(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{(s + 1)(s + 4)}\begin{pmatrix} -1 - s & 0 \\ -1 & -4 - s \end{pmatrix}.$$

Ifølge (2.36) er overføringsfunktionen da

$$\begin{aligned} H(s) &= -\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+4)} \begin{pmatrix} -1-s & 0 \\ -1 & -4-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{(s+1)(s+4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4-4s \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{4s+16}{(s+1)(s+4)} \\ &= \frac{4(s+4)}{(s+1)(s+4)} = \frac{4}{s+1}, \quad s \notin \{-1, -4\}. \end{aligned}$$

Det er meget vigtigt, at vi ved udtrykket for $H(s)$ også har angivet definitionsmængden: det færdige udtryk

$$H(s) = \frac{4}{s+1}$$

afslører jo ikke, at $H(s)$ ikke er defineret for $s = -4$. □

Begrebet overføringsfunktion spiller en vigtig rolle ved løsning af differentialligningssystemer med periodiske påvirkninger. For at kunne vise dette i detaljer får man brug for Fourierrækker; vi vender tilbage hertil i afsnit 7.2. Nedenstående eksempel redegør for hvor langt vi kan nå med den teori vi har til rådighed på nuværende tidspunkt.

**Eksempel 2.23** Betragt et system af formen (2.32) med overføringsfunktion $H(s)$. Hvis vi sætter $u(t) = e^{int}$ for et $n \in \mathbb{Z}$ for hvilket $\det(\mathbf{A} - in\mathbf{I}) \neq 0$, har vi ifølge sætning 2.21 en løsning af formen

$$y(t) = H(in)e^{int}.$$

Ved hjælp af superpositionsprincippet kan vi udvide dette resultat. Lad os betragte en påvirkning $u$, der er en linearkombination af eksponentialfunktioner af typen $e^{int}$, hvor $n \in \mathbb{Z}$; en sådan funktion kan skrives på formen

$$u(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \tag{2.39}$$

for et passende $N \in \mathbb{N}$ og passende koefficienter $c_n$. Superpositionsprincippet siger nu, at hvis vi kan løse differentialligningssystemet (2.32) for hver af de eksponentialfunktioner der optræder i (2.39), dvs. hvis

$$\det(\mathbf{A} - in\mathbf{I}) \neq 0 \quad \text{for alle} \quad n = -N, -N+1, \ldots, N,$$

så har (2.32) med funktionen (2.39) som påvirkning en løsning givet ved

$$y(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n H(in) e^{int}.$$

Dette leder til en metode til løsning af (2.32) som kan anvendes for en stor klasse af periodiske påvirkninger $u$. I Fourierrækketeorien viser vi, at

"enhver" funktion $u$ med periode $2\pi$ kan fremstilles som en "grænse" for en følge af funktioner på formen (2.39): hermed menes, at man for passende koefficienter $c_n,\ n \in \mathbb{Z}$, kan skrive

$$u(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$

Dette skrives kort som

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Det viser sig nu, at en generaliseret udgave af superpositionsprincippet kan anvendes: hvis systemet (2.32) opfylder en stabilitetsbetingelse som introduceres i det følgende afsnit, så har (2.32) en løsning givet ved

$$y(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n H(in) e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}.$$

Vi vender tilbage til dette i afsnit 7.2. □

## 2.7 Frekvenskarakteristikker

Overføringsfunktionen $H(s)$ i (2.36) spiller nøjagtig den samme rolle for differentialligningssystemer som overføringsfunktionen (1.20) spiller for $n$'te ordens differentialligningen. Svarende til sætning 1.27 gælder:

**Sætning 2.24 (Stationære svar)** *Når man sætter*

$$u(t) = \cos \omega t,$$

*hvor* $\det(\mathbf{A} - i\omega \mathbf{I}) \neq 0$*, da har* (2.32) *løsningen*

$$y(t) = \mathrm{Re}\,(H(i\omega)e^{i\omega t}) = |H(i\omega)| \cos(\omega t + \mathrm{Arg}\, H(i\omega)). \tag{2.40}$$

*Under samme antagelse fås for* $u(t) = \sin \omega t$ *at* (2.32) *har løsningen*

$$y(t) = \mathrm{Im}\,(H(i\omega)e^{i\omega t}) = |H(i\omega)| \sin(\omega t + \mathrm{Arg}\, H(i\omega)).$$

Funktionen

$$A(\omega) = |H(i\omega)|,\ \omega > 0,$$

kaldes *amplitudekarakteristikken* for (2.32). Funktionen

$$\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}\, H(i\omega),\ \omega > 0,$$

kaldes *fasekarakteristikken* for (2.32). Under ét kaldes de to funktioner for *frekvenskarakteristikker*. Med disse definitioner kan alle overvejelser om frekvenskarakteristikker i afsnit 1.5 overføres uændret til 1.ordens differentialligningssystemer.

**Eksempel 2.25** I eksempel 2.22 betragtede vi et system med overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{4}{s+1}, \; s \notin \{-1, -4\}.$$

For et givet $\omega > 0$ har vi således

$$H(i\omega) = \frac{4}{1+i\omega};$$

dermed er amplitudekarakteristikken givet ved

$$A(\omega) = |H(i\omega)| = \left|\frac{4}{1+i\omega}\right| = \frac{4}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Ved brug af formlen (1.31) fås at fasekarakteristikken er

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) = \operatorname{Arg}(H(i\omega)) &= \operatorname{Arg}\left(\frac{4}{1+i\omega}\right) \\ &= \operatorname{Arg}(4) - Arg(1+i\omega) \quad (\pm 2\pi) \\ &= -\operatorname{Arctan}\omega, \; \omega > 0. \end{aligned}$$

Da funktionen Arctan antager værdier i intervallet $]-\pi/2, \pi/2[$ får vi ikke brug for korrektionsleddet $\pm 2\pi$ i udtrykket for fasekarakteristikken. □

## 2.8 Stabilitet for homogene systemer

I de foregående afsnit har vi udledt generelle løsningsformler for lineære homogene og inhomogene differentialligningssystemer, som for en given begyndelsesbetingelse $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ og en given påvirkning $\mathbf{u}(t)$ giver information om løsningen $\mathbf{x}$ for alle tider $t$. I praktiske problemer er man ofte i den situation at hverken begyndelsestilstand eller påvirkning kendes helt præcist, med den konsekvens at løsningen ikke kan beregnes nøjagtigt. I denne sammenhæng er det vigtigt at kunne beskrive løsningsforholdene kvalitativt, og her kommer begrebet "stabilitet" ind.

Stabile tekniske, fysiske og kemiske systemer er kendetegnet ved, at begrænsede påvirkninger kun fremkalder begrænsede virkninger i systemets opførsel. Tilsvarende vil små forstyrrelser af begyndelsesbetingelser og påvirkninger kun give anledning til små ændringer i systemets opførsel.

Men det er muligt, at et fysisk system reagerer meget kraftigt selv ved en lille forstyrrelse af begyndelsesbetingelsen eller ved en begrænset påvirkning. Sådanne systemer siges at være ustabile. Eksempler er voksende svingninger i konstruktioner, som får disse til at bryde sammen, kemiske reaktioner som løber løbsk, roterende aksler som river sig ud af lejerne etc. I det følgende skal disse løse forestillinger om stabilitet og ustabilitet af systemer omsættes til mere præcise definitioner, gældende for et

lineært differentialligningssystem med konstante koefficienter,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \quad = \quad \mathbf{A}\mathbf{x}(t),\ t \in [t_0, \infty[. \tag{2.41}$$

I definitionen af stabilitet skal vi bruge begrebet "begrænset vektorfunktion". En sædvanlig funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ siges at være begrænset, hvis alle talværdier $|f(t)|,\ t \in \mathbb{R}$, holder sig under en vis maksimal værdi, altså hvis der findes en konstant $K > 0$ således at $|f(t)| \leq K$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Tilsvarende siges, at en vektorfunktion

$$\mathbf{x} : I \to \mathbb{C}^n, I \subseteq \mathbb{R},\ \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

er *begrænset*, hvis hver af de skalære koordinatfunktioner $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ er begrænset. Dette er ensbetydende med at der findes et tal $K > 0$, således at

$$||\mathbf{x}(t)|| := \sqrt{|x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2 + \cdots + |x_n(t)|^2} \leq K \text{ for alle } t \in I. \tag{2.42}$$

Bemærk at $||\mathbf{x}(t)||$ netop er længden af vektoren $\mathbf{x}(t)$. Vi skal beskæftige os med to typer stabilitet:

**Definition 2.26 (Stabilitet og asymptotisk stabilitet)**

*(i) Det homogene system* (2.41) *siges at være stabilt, hvis enhver løsning* $\mathbf{x}(t), t \in [t_0, \infty[$ *er begrænset. I litteraturen bruges undertiden betegnelsen "marginalt stabilt".*

*(ii) Systemet* (2.41) *siges at være asymptotisk stabilt, hvis der for enhver løsning* $\mathbf{x}(t), t \in [t_0, \infty[$, *gælder at*

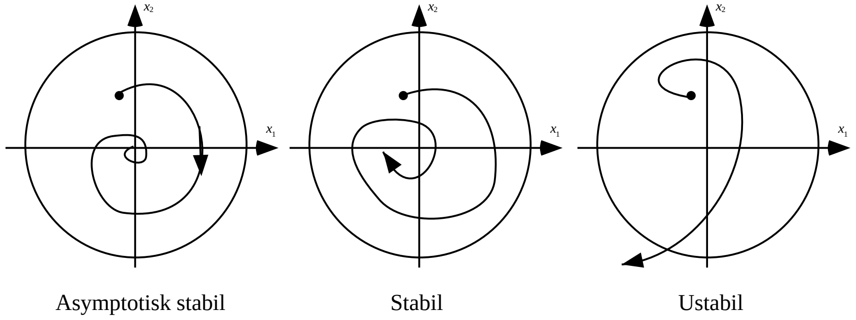
$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \textit{ for } t \to \infty.$$

*I litteraturen bruges undertiden betegnelsen "internt stabilt".*

*Hvis et system ikke er stabilt, så siges det at være ustabilt (eller instabilt).*

Bemærk at et asymptotisk stabilt system automatisk er stabilt.

For et fysisk system der er modelleret ved et stabilt lineært system af formen (2.41), vil alle begyndelsesbetingelser føre til begrænsede løsninger. I tilfælde af asymptotisk stabilitet vil systemet ydermere stræbe efter at indtage sin ligevægtsstilling. For et homogent system af dimension 2 (dvs. $n$=2) anskueliggør figur 2.27 begreberne asymptotisk stabil, stabil og ustabil.




**Figur 2.27** *Illustration af opførslen af løsningerne* $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ *til et system af typen* (2.41) *for en* $2\times 2$ *matrix. For et asymptotisk stabilt system vil* $\mathbf{x}(t)$ *konvergere mod* $\mathbf{0}$ *for* $t \to \infty$, *mens* $\mathbf{x}(t)$ *for et stabilt system blot vides at holde sig indenfor en cirkel i* $\mathbb{R}^2$ *med radius* $K$, *se* (2.42). *For et ustabilt system kan* $\mathbf{x}(t)$ *være ubegrænset.*

I henhold til definitionen kan man undersøge stabilitetsforholdende for et system ved at studere løsningernes opførsel for $t \to \infty$. Vi illustrerer dette med et par eksempler; vi vil herefter vise, at der er simplere metodere, hvor man kan aflæse stabilitetsforholdende direkte af systemmatricen uden at skulle finde løsningerne til systemet.

**Eksempel 2.28** Vi betragter det homogene differentialligningssystem

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

for $t \geq 0$. På matrixform skrives det som

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \;\; t \geq 0.$$

Dette system har ifølge eksempel 2.8 (med $\omega = 1$) løsningerne

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \sin t - c_2 \cos t \\ c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Vi har altså koordinatfunktionerne

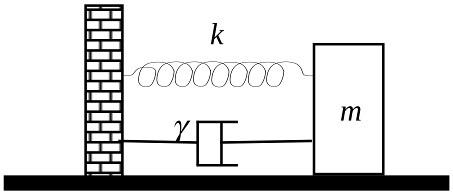
$$x_1(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t \text{ og } x_2(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

For at vise at systemet er stabilt, skal vi ifølge definitionen vise at begge koordinatfunktioner er begrænsede. Ved at benytte trekantsuligheden $|a + b| \leq |a| + |b|$, samt at $|\sin t| \leq 1$ og $|\cos t| \leq 1$ for alle $t$, ses at

$$\begin{aligned} |x_1(t)| = |c_1 \sin t - c_2 \cos t| &\leq |c_1 \sin t| + |c_2 \cos t| \\ &= |c_1|\,|\sin t| + |c_2|\,|\cos t| \\ &\leq |c_1| + |c_2|. \end{aligned}$$

Dette viser at $x_1(t)|$ er begrænset; på samme måde vises at $x_2(t)$ er begrænset. Vi slutter at systemet er stabilt. Men da koordinatfunktionerne ikke går mod 0 for $t \to \infty$ (pånær for den specielle løsning med $c_1 = c_2 = 0$), er systemet ikke asymptotisk stabilt. □

**Eksempel 2.29** Betragt et masse-fjeder-dæmper system som vist på figuren.




Den lineære modelligning for de frie svingninger af systemet er som nævnt i eksempel 1.2

$$\ddot{y}(t) + \frac{\gamma}{m}\dot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0, \ t \geq 0, \tag{2.43}$$

hvor $m$ er massen, $\gamma > 0$ er dæmpningskonstanten, $k > 0$ er fjederkonstanten og $y(t)$ er massens position (relativt til hvilepositionen) som funktion af tiden $t$. Som omtalt i afsnit 2.1 kan denne ligning med substitutionen $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ omskrives til et system

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Egenværdierne for systemmatricen i (2.44) er netop rødderne i karakterligningen for differentialligningen (2.43), dvs. rødderne i polynomiet

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0.$$

I tilfældet $\frac{k}{m} > \frac{\gamma^2}{4m^2}$ har vi her to (komplekse) rødder givet som

$$\lambda_{1,2} = -d \pm i\omega, \ \text{hvor } d = \frac{\gamma}{2m} > 0, \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} > 0.$$

Fundamentalmatricen $\mathbf{\Phi}_0$ til (2.44), dvs. den fundamentalmatrix for hvilken $\mathbf{\Phi}_0(0) = \mathbf{I}$, er da

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_0(t) &= \begin{pmatrix} e^{-dt}(\cos\omega t + \frac{d}{\omega}\sin\omega t) & e^{-dt}(\frac{1}{\omega}\sin\omega t) \\ e^{-dt}(-\frac{d^2+\omega^2}{\omega}\sin\omega t) & e^{-dt}(\cos\omega t - \frac{d}{\omega}\sin\omega t) \end{pmatrix} \\ &= e^{-dt}\begin{pmatrix} \cos\omega t + \frac{d}{\omega}\sin\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\frac{d^2+\omega^2}{\omega}\sin\omega t & \cos\omega t - \frac{d}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fra sætning 2.16 vides, at enhver løsning $\mathbf{x}(t)$ kan skrives på formen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}_0(t)\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Da $d > 0$ og $|\cos\omega t| \leq 1, |\sin\omega t| \leq 1$, kan

man med samme metode som i eksempel 2.28 vise at alle disse løsninger er begrænsede, og endvidere går mod $\mathbf{0}$ for $t \to \infty$. Systemet er derfor asymptotisk stabilt, hvad der egentlig ikke er overraskende, da vi jo har modelleret en dæmpet svingning. □

**Eksempel 2.30** Det homogene differentialligningssystem

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{3}x_1(t) + \frac{2}{3}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{4}{3}x_1(t) + \frac{1}{3}x_2(t), \end{cases}$$

betragtet for $t \geq 0$, har matrixformen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \ t \geq 0. \tag{2.45}$$

Ved brug af metoderne i afsnit 2.2 vises at systemet f.eks. har løsningen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

Da $e^t \to \infty$ for $t \to \infty$ er løsningen ubegrænset. Derfor er systemet ustabilt. Det vil således normalt være uhensigtmæssigt at modellere et praktisk problem med systemet (2.45). □

I praksis er det omstændeligt at skulle finde alle løsningerne til et system for at kunne afgøre om systemet er stabilt: hvis det viser sig at et system er ustabilt vil man normalt ændre på modelleringen af systemet så man opnår et stabilt system, og i den forstand er arbejdet med at finde selve løsningerne spildt. Vi vil nu formulere nogle vigtige sætninger, der viser, at stabilitetsforholdende kan afgøres direkte ved at beregne egenværdierne for systemmatricen, *uden* at finde løsningerne til ligningssystemet. Til det formål betragter vi først strukturen af løsningerne til det homogene system (2.41). Vi har tidligere i afsnit 2.2 set, hvordan løsningerne til (2.41) er helt bestemt ved egenværdierne og egenvektorerne til systemmatricen $\mathbf{A}$. I det følgende eksempel undersøges formen af de enkelte koordinatfunktioner.

**Eksempel 2.31** Betragtningerne i dette eksempel er helt generelle, men for overskuelighedens skyld gennemfører vi dem for et system (2.41) bestående af to ligninger. Løsningerne $\mathbf{x}(t)$ har således to koordinater,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Vi vil undersøge formen af koordinatfunktionerne $x_1(t)$ og $x_2(t)$. Vi deler op i flere tilfælde:

(i) Lad $\lambda$ være en reel egenværdi for matricen $\mathbf{A}$, med en tilhørende egentlig egenvektor $\mathbf{v}$. Så har systemet (2.41) ifølge sætning 2.3 løsningerne

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}.$$

De to koordinatfunktioner $x_1(t)$ og $x_2(t)$ har altså samme form, så vi nøjes med at betragte $x_1(t)$. Kaldes førstekoordinaten af vektoren $\mathbf{v}$ for $v_1$ kan vi skrive $x_1(t) = v_1 e^{\lambda t}$. For overskuelighedens skyld vil vi antage at $v_1$ er reel og positiv. Hvis $\lambda > 0$ er $x_1$ dermed en voksende eksponentialfunktion, og hvis $\lambda < 0$ fås en aftagende eksponentialfunktion; hvis $\lambda = 0$ fås en konstant funktion. Forløbet af disse funktioner er vist på den venstre del af figur 2.32.
(ii) Hvis $\lambda$ er kompleks, $\lambda = a + i\omega$, så fås på tilsvarende vis

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda t} = v_1 e^{(a+i\omega)t} = v_1 e^{at}(\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Hvis $v_1$ er reel, så er realdelen af $x_1$ givet ved

$$Re(x_1(t)) = v_1 e^{at} cos\omega t.$$

Realdelen af $x_1$ er skitseret på den højre del af figur 2.32 for tilfældene $a > 0, a < 0, a = 0$.

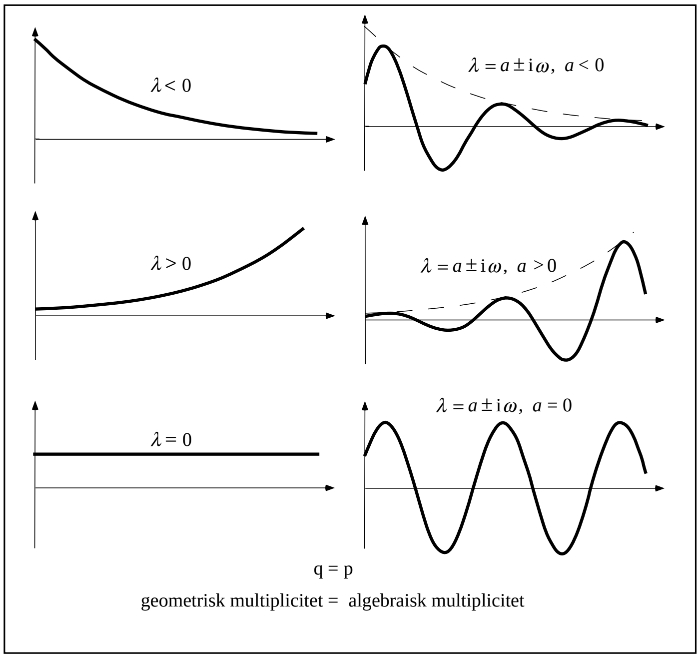
(iii) Hvis egenværdien $\lambda$ optræder med geometrisk multiplicitet svarende til den algebraiske multiplicitet, så får alle løsningerne den beskrevne form. Men hvis den geometriske multiplicitet af $\lambda$ er mindre end den algebraiske multiplicitet, så optræder der ifølge sætning 2.10 også løsninger af formen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_{21} e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{22} t e^{\lambda t}. \tag{2.46}$$

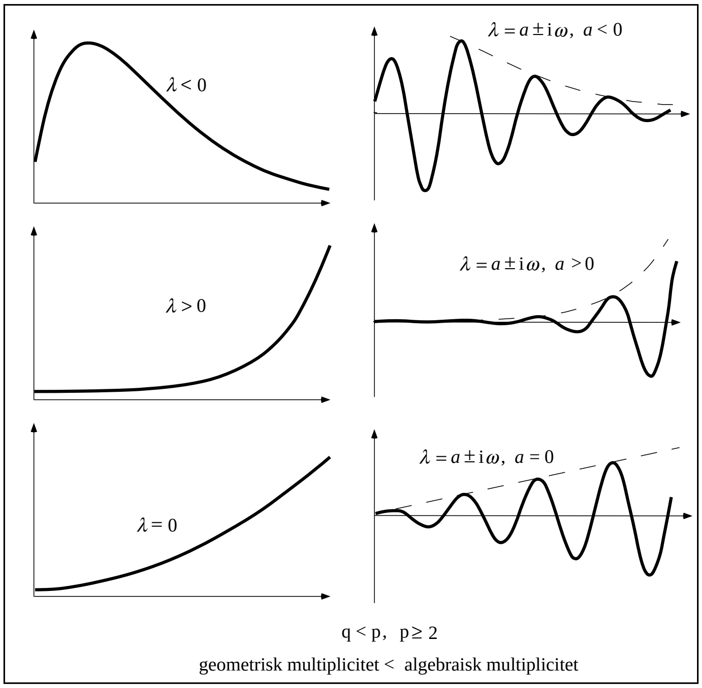
Her er $\mathbf{b}_{21}$ og $\mathbf{b}_{22}$ vektorer; lad os kalde deres førstekoordinater for henholdsvis $u_1$ og $v_1$. Med denne notation kan førstekoordinaten for løsningen $\mathbf{x}(t)$ i (2.46) skrives

$$x_1(t) = u_1 e^{\lambda t} + v_1 t e^{\lambda t}.$$

Forløbet af løsninger af denne form (henholdsvis, dens realdel hvis løsningen er kompleks) er vist på figur 2.33. □




**Figur 2.32**




**Figur 2.33**

De følgende sætninger viser hvorledes stabilitetsforholdene for et system kan undersøges udfra kendskab til egenværdierne. Beviset for den følgende sætning er i appendiks A.5.

**Sætning 2.34 (Stabilitet)** *Det lineære homogene system* (2.41) *er stabilt, hvis og kun hvis følgende to betingelser er opfyldt:*

*(i) ingen egenværdi for systemmatricen* $\mathbf{A}$ *har en positiv realdel, og*

*(ii) enhver egenværdi for systemmatricen* $\mathbf{A}$ *med en realdel som er nul har lige stor algebraisk og geometrisk multiplicitet.*

Bemærk, at hvis $\mathbf{A}$ har $n$ *forskellige* egenværdier, så er $p = q = 1$ for alle egenværdier. I dette tilfælde skal man altså blot checke at ingen egenværdi har positiv realdel:

**Korollar 2.35** *Hvis* $\mathbf{A}$ *har* $n$ *forskellige egenværdier, så er systemet* (2.41) *stabilt hvis og kun hvis ingen egenværdi for* $\mathbf{A}$ *har positiv realdel.*

Angående asymptotisk stabilitet haves følgende vigtige resultat.

**Sætning 2.36 (Asymptotisk stabilitet)** *Systemet* (2.41) *er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis alle egenværdier for systemmatricen* $\mathbf{A}$ *har negativ realdel.*

**Bevis:** Sætning 2.10 beskriver hvorledes man finder en basis for løsningsrummet til systemet (2.41). Betingelsen for at alle disse løsninger går mod $\mathbf{0}$ for $t \to \infty$ er netop at alle egenværdierne har negativ realdel. □

**Eksempel 2.37** Vi betragter systemet $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),\ t \geq 0$, hvor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 4 = \lambda^2.$$

Derfor er $\lambda = 0$ den eneste egenværdi, og den algebraiske multiplicitet er $p = 2$. Alle løsninger til ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ har formen

$$\mathbf{v} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så den geometriske multiplicitet er $q = 1$. Sætning 2.34 viser nu at differentialligningssystemet er ustabilt. □

**Eksempel 2.38**

(i) Systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fra eksempel 2.28 har egenværdierne $\pm i$, begge med algebraisk og geometrisk multiplicitet lig med 1. Derfor er systemet $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), t \geq 0$ stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

(ii) Systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

fra eksempel 2.30 har egenværdierne $\pm 1$. Systemet er derfor ustabilt.

□

Da asymptotisk stabilitet af et system er ensbetydende med, at alle egenværdier til systemmatricen har negativ realdel, kan denne form for stabilitet i princippet afgøres ved at man udregner samtlige egenværdier. Her bemærkes dog, at det karakteristiske polynomium har grad $n$, og at man kun kender analytiske udtryk for rødderne når $n \leq 4$. Endvidere indgår der i mange modeller nogle parametre, altså variable, hvis værdier ønskes optimeret. Dette gør kun opgaven endnu vanskeligere. Derfor har man siden den moderne stabilitetsteoris opståen for godt 100 år siden søgt at opstille såkaldte stabilitetskriterier, som tillader at afgøre stabilitet eller ustabilitet uden eksplicit beregning af egenværdierne for systemet. Et af de vigtigste stabilitetskriterier er *Routh-Hurwitz' kriterium*. Vi formulerer resultatet generelt for $n'$tegradspolynomier, for hvilke koefficienten til $\lambda^n$ er 1:

**Sætning 2.39 (Routh-Hurwitz' kriterium)** *Alle rødderne i et polynomium med reelle koefficienter*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{2.47}$$

*har negativ realdel, hvis og kun hvis de følgende to betingelser er opfyldt:*

*(i) alle koefficienterne er positive, det vil sige* $a_k > 0$ *for* $k = 1, \ldots, n$*;*

*(ii) alle* $k \times k$ *determinanter,* $k = 2, \ldots, n-1$*, på formen*

$$D_k = det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdot & \cdot & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_k \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

*er positive, det vil sige* $D_k > 0$ *(i udtrykket for* $D_k$ *sættes* $a_p = 0$ *for* $p > n$*).*

For at gøre indholdet af Routh-Hurwitz' kriterium klarere, vil vi specielt for et andengrads-, et trediegrads- og et fjerdegradspolynomium eksplicit angive de uligheder, der skal være opfyldt, hvis alle rødderne i det pågældende polynomium skal have negativ realdel.

For et andengradspolynomium

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

er der ingen størrelse $D_k$ at tage i betragtning. Vi har derfor ifølge Routh-Hurwitz' kriterium:

**Korollar 2.40** *Alle rødderne i et andengradspolynomium*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

*med reelle koefficienter har negativ realdel, hvis og kun hvis*

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \tag{2.49}$$

For et trediegradspolynomium

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

skal vi udover koefficienterne betragte determinanten $D_2$ for en $2\times2$ matrix. Der gælder derfor ifølge Routh-Hurwitz' kriterium:

**Korollar 2.41** *Alle rødderne i et trediegradspolynomium*

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

*med reelle koefficienter har negativ realdel, hvis og kun hvis*

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} > 0. \tag{2.50}$$

Lad os endeligt betragte et fjerdegradspolynomium

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4.$$

Determinanten $D_2$ er bestemt som ovenfor, og i $D_3$ bruger vi, at $a_5$ sættes lig nul. Der gælder derfor i dette tilfælde ifølge Routh-Hurwitz' kriterium

**Korollar 2.42** *Alle rødderne i et fjerdegradspolynomium*

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$$

*med reelle koefficienter har negativ realdel, hvis og kun hvis*

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0,\ det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} > 0,\ det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} > 0.$$

**Eksempel 2.43** Vi vil bestemme de værdier af en parameter $a$, for hvilke differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \text{ med } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

er asymptotisk stabilt. Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + a).$$

For at kunne anvende korollar 2.41 skal koefficienten til leddet $\lambda^3$ være 1. Derfor benyttes at

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + a = 0.$$

Ifølge Routh-Hurwitz' kriterium kan vi nu slutte at systemet asymptotisk stabilt hvis og kun hvis

$$a > 0 \text{ og } \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - a > 0,$$

det vil sige hvis og kun hvis $0 < a < 1$. Når $a$ varierer og gennemløber den reelle akse, vil en egenværdi altså passere tværs over den imaginære akse, når $a$ passerer 0 og 1. Dette passer med, at for $a = 0$ er $\lambda = 0$ en egenværdi og for $a = 1$ er $\lambda = i$ en egenværdi. □

## 2.9 Stabilitet for inhomogene systemer

Vi skal nu behandle det lineære inhomogene differentialligningssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \quad = \quad \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \ t \in [t_0, \infty[. \tag{2.51}$$

Det inhomogene system modellerer "påvirkede" fysiske systemer, mens det homogene system (2.41) beskriver "frie" fysiske systemer. Et naturligt spørgsmål er, hvordan systemet (2.51) reagerer på en lille ændring af begyndelsesbetingelserne ved uforandret påvirkning. Vi indfører derfor følgende definition:

**Definition 2.44 (Asymptotisk stabilitet)** *Systemet* (2.51) *er asymptotisk stabilt, hvis der for enhver påvirkning* $\mathbf{u}$ *gælder, at to vilkårlige løsninger* $\mathbf{x}_1(t)$ *og* $\mathbf{x}_2(t)$ *til systemet med denne påvirkning* $\mathbf{u}$ *opfylder at*

$$\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) \to \mathbf{0} \text{ for } t \to \infty.$$

Asymptotisk stabilitet af systemet (2.51) betyder netop, at forskellen mellem to løsninger hørende til forskellige begyndelsesbetingelser vil "klinge ud" med tiden.

Vi viser nu, at asymptotisk stabilitet af det inhomogene system (2.51) er det samme som asymptotisk stabilitet af det tilhørende homogene system:

**Sætning 2.45 (Asymptotisk stabilitet)** *Det inhomogene system* (2.51) *er asymptotisk stabilt hvis og kun hvis det tilhørende homogene system* $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ *er asymptotisk stabilt.*

**Bevis:** Antag først, at det homogene system $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ er asymptotisk stabilt. Lad $\mathbf{x}_1(t)$ og $\mathbf{x}_2(t)$ være to vilkårlige løsninger til det inhomogene system, dvs.,

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{u}(t), \quad \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{u}(t).$$

Heraf følger ved subtraktion, at

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)),$$

altså at $\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$ løser det homogene system. Da dette system er antaget at være asymptotisk stabilt følger det at

$$\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) \to \mathbf{0} \text{ for } t \to \infty.$$

Hermed er det vist, at det inhomogene system er asymptotisk stabilt.

Antag nu omvendt at det inhomogene system er asymptotisk stabilt. Lad $\mathbf{x}(t)$ være en vilkårlig løsning til det homogene system $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Bemærk, at også $\mathbf{0}$ er løsning til det homogene system. Da det homogene system fremkommer af det inhomogene system ved valget $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, følger det nu af den asymptotiske stabilitet af det inhomogene system, at

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{0} \to \mathbf{0} \text{ for } t \to \infty. \qquad \square$$

Et andet vigtigt spørgsmål i forbindelse med systemet (2.51) er, hvordan begrænsede påvirkninger $\mathbf{u}$ har indflydelse på systemets løsninger $\mathbf{x}$: for eksempel, om begrænsede påvirkninger $\mathbf{u}$ fører til begrænsede løsninger.

**Definition 2.46 (BIBO-stabilitet)** *Det inhomogene system* (2.51) *siges at være BIBO-stabilt hvis løsningerne* $\mathbf{x}(t), t \in [t_0, \infty[$ *hørende til enhver begrænset påvirkning* $\mathbf{u}$ *er begrænsede.*

Ordet "BIBO" er en forkortelse af det engelske udtryk "Bounded Input – Bounded Output". Man kan vise at denne form for stabilitet er ækvivalent med asymptotisk stabilitet:

**Sætning 2.47 (BIBO-stabilitet)** *Det inhomogene system* (2.51) *er BIBO-stabilt hvis og kun hvis det tilhørende homogene system* $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ *er asymptotisk stabilt.*

Stabilitetsforholdene for et inhomogent ligningssystem kan altså afgøres ved at udregne alle egenværdierne, eller ved at bruge Routh–Hurwitz' kriterium, nøjagtigt som for et homogent system.

**Eksempel 2.48** Betragt systemet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) \text{ med } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-1-\lambda)^3 - 1 = -(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 2).$$

Derfor gælder, at

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Vi anvender nu korollar 2.41 med $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 2$: da

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} = 7 > 0,$$

slutter vi, at alle tre egenværdier har negativ realdel. Derfor er systemet asymptotisk stabilt. □

Lad os til slut vende tilbage til systemet (2.32) og redegøre for den specielle betydning af det stationære svar:

**Eksempel 2.49** Antag at (2.32) er asymptotisk stabilt, og betragt et vilkårligt $\omega > 0$. Ifølge sætning 2.36 er det komplekse tal $i\omega$ ikke en egenværdi for systemmatricen $\mathbf{A}$, dvs. $i\omega$ er ikke rod i karakterligningen. For $u(t) = e^{i\omega t}$ er det stationære svar ifølge sætning 2.21 givet ved

$$y(t) = H(i\omega)e^{i\omega t}.$$

Den fuldstændige løsning til (2.32) er derfor

$$y(t) = H(i\omega)e^{i\omega t} + y_h(t),$$

hvor $y_h$ betegner den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning. Men ifølge definitionen af asymptotisk stabilitet gælder at

$$y_h(t) \to 0 \text{ for } t \to \infty.$$

Dette betyder at der for en *vilkårlig* løsning $y$ til (2.32) gælder at

$$y(t) \approx H(i\omega)e^{i\omega t}$$

for store værdier af $t$. Enhver løsning til (2.32) vil altså opføre sig som det stationære svar efter tilstrækkelig lang tid. □

# Kapitel 3

## Ulineære differentialligninger

Hovedvægten i nærværende bog ligger på studiet af lineære differentialligninger og lineære differentialligningssystemer. En anden vigtig klasse af differentialligninger udgøres af ulineære differentialligninger. For sådanne differentialligninger kan de hidtil beskrevne metoder ikke direkte anvendes. Endvidere er man normalt ikke i stand til at skrive løsningerne eksplicit op, men må benytte numeriske metoder. I dette kapitel gives en kort introduktion til ulineære differentialligninger og de metoder man bruger til at undersøge dem med.

### 3.1 Introduktion

Lad $f_1, f_2, \ldots, f_n$ betegne funktioner der er definerede på $\mathbb{R}^n$ og har værdimængde i $\mathbb{R}$. Vi betragter et system af differentialligninger på formen

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)). \end{cases} \tag{3.1}$$

Med vektornotationen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{pmatrix}$$

kan systemet (3.1) skrives

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t})). \tag{3.2}$$

Vi bemærker, at det homogene lineære differentialligningssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{3.3}$$

som vi studerede i kapitel 2, er et specialtilfælde af (3.1), svarende til at funktionen $\mathbf{f}$ er lineær,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t})) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}). \tag{3.4}$$

I det generelle tilfælde kaldes et differentialligningssystem af formen (3.2) et *ulineært autonomt differentialligningssystem.* Ordet "autonomt" kommer af "auto=selv, nomos=styret". Det knyttes til de differentialligninger vi betragter her for at adskille dem fra mere generelle differentialligningssystemer af formen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ (såkaldte *ikke-autonome* differentialligninger). Vi noterer, at systemet (3.3) er autonomt, mens det inhomogene system

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t),$$

*ikke* er autonomt, medmindre funktionen $\mathbf{u}$ er konstant.

**Eksempel 3.1** Systemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_1(t) + 3x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = & x_1(t) + x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

er et autonomt ulineært system. Vi vil normalt undertrykke afhængigheden af $t$ i notationen og blot skrive

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_1 + 3x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = & x_1 + x_1x_2 \end{cases}$$

Vi kan direkte aflæse at funktionen $\mathbf{f}$ i (3.2) er

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_1x_2 \\ x_1 + x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Systemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_1(t) + 3x_1(t)x_2(t) + t^2, \\ \dot{x}_2(t) = & x_1(t) + x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

er et ikke-autonomt ulineært system: højresiden afhænger jo ikke blot af funktionerne $x_1(t)$ og $x_2(t)$, men også direkte af $t^2$. □

Eksistens- og entydighedssætningen gælder også for autonome ulineære differentialligningssystemer:

**Sætning 3.2 (Eksistens- og entydighedssætningen)** *Antag at funktionen* $\mathbf{f}$ *har kontinuerte partielle afledede. For ethvert givet* $t_0 \in \mathbb{R}$ *og* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *har* (3.2) *en éntydigt bestemt løsning* $\mathbf{x}(t)$ *der tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{v}$.

Normalt er det desværre ikke muligt at angive en eksplicit løsning til (3.2) i termer af elementære funktioner. Spørgsmålet er nu hvordan man kan analysere den forelagte differentialligning når løsningerne kun kan findes numerisk. Vi vil i dette afsnit kort gennemgå nogle værktøjer som kan anvendes her.

For at danne sig et overblik over løsningerne til en differentialligning af formen (3.2) benytter man sig af de såkaldte *faseportrætter*. Herved forstås, at man for udvalgte begyndelsesbetingelser skitserer de tilsvarende løsningskurver $\mathbf{x}(t),\ t \in \mathbb{R}$. For $n = 2$ fås altså kurver i $\mathbb{R}^2$, bestående af punkter af formen $(x_1(t), x_2(t)),\ t \in \mathbb{R}$. Vi bemærker, at disse løsningskurver ikke indeholder noget information om hvilken $t$-værdi, der svarer til hvilket punkt.

I tilfælde af at man ikke kender løsningerne til et givet 2-dimensionalt differentialligningssystem, kan man ikke benytte definitionen på faseportrættet direkte. I stedet benyttes, at en løsningskurve $\mathbf{x}$ til et givet tidspunkt $t_0$ passerer punktet $\mathbf{x}(t_0)$, og at tangenten i dette punkt er givet ved parameterfremstillingen

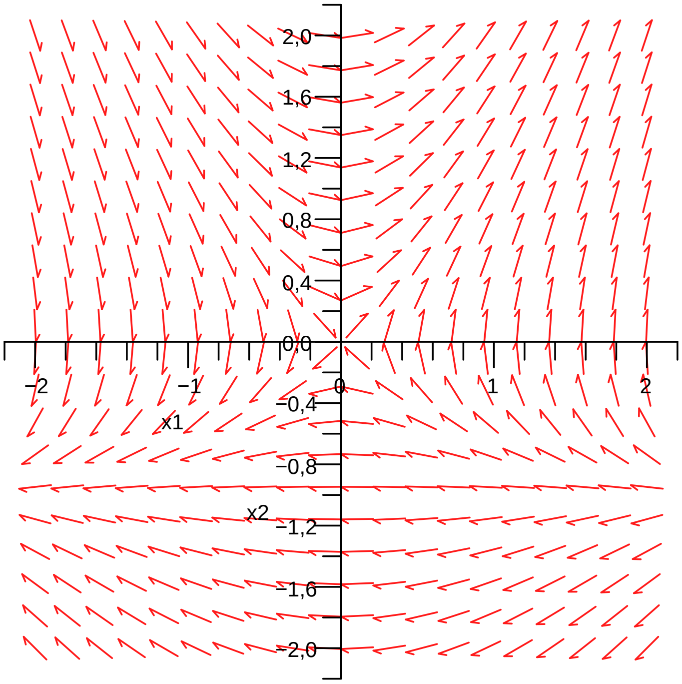
$$\varphi(t) = \dot{\mathbf{x}}(t_0)(t - t_0) + \mathbf{x}(t_0).$$

Løsningskurven har således i punktet $\mathbf{x}(t_0)$ en retning bestemt af vektoren

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0)).$$

I et givet punkt $(x_1, x_2)$ kan vi nu betragte den løsningskurve $\mathbf{x}(t)$, som til tidspunktet $t_0$ opfylder at $\mathbf{x}(t_0) = (x_1, x_2)$; ifølge ovenstående har den i punktet $(x_1, x_2)$ en retning som er bestemt af vektoren $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{f}(x_1, x_2)$. Faseportrættet skitseres nu ved at man i udvalgte punkter $(x_1, x_2)$ afsætter en vektor i retning af vektoren $\mathbf{f}(x_1, x_2)$.

Det fremgår heraf, at for de betragtede autonome systemer er faseportrættet (altså forløbet af løsningskurverne) uafhængigt af det valgte starttidspunkt $t_0$. Af denne grund vil vi i forbindelse med undersøgelser af løsningskurvernes forløb (se stabilitetsundersøgelsen på side 67) normalt vælge $t_0 = 0$.




**Figur 3.3** *Faseportrættet hørende til differentialligningssystemet i eksempel 3.4.*

**Eksempel 3.4** Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2, \\ \dot{x}_2 = & x_1 + x_1 x_2. \end{cases}$$

I punktet $(1, 0)$ er

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

en vektor i retning af denne vektor afsættes altså i punktet $(1, 0)$. Hvis denne procedure fortsættes med et stort antal punkter fås et faseportræt som vist på figur 3.3. I praksis tegnes faseportrætter nemmest ved brug af Maple. □

Undertiden findes der løsningskurver til (3.2), der blot består af et enkelt punkt:

**Definition 3.5 (Stationært punkt)** *Lad* (3.2) *være et autonomt system. Et punkt* $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ *for hvilket* $\mathbf{f}(\mathbf{x_s}) = \mathbf{0}$ *kaldes et stationært punkt.*

Et stationært punkt kaldes undertiden for en *ligevægtstilstand.* Bemærk at hvis $\mathbf{x}_s$ er et stationært punkt, så er den konstante funktion

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s$$

løsning til (3.2). Vi vil i eksempel 3.11 se en fortolkning af hvad det betyder at et punkt er stationært i en konkret sammenhæng: hvis man forestiller sig at koordinaterne $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ betegner antallet af individer i $n$ vekselvirkende populationer, så svarer et stationært punkt til at populationerne kan sameksistere i de konstante antal givet ved koordinaterne i $\mathbf{x}_s$.

Som nævnt spiller begyndelsestidspunktet $t_0$ ikke nogen rolle for forløbet af løsningskurverne, så i det følgende vælger vi $t_0 = 0$. Lad os betragte en begyndelsesbetingelse $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$, hvor $\mathbf{v}$ befinder sig i umiddelbar nærhed af et stationært punkt $\mathbf{x_s}$. Ifølge eksistens– og entydighedssætningen vil der være netop én løsningskurve, der passerer punktet $\mathbf{v}$ til tiden $t = 0$. Man kunne nu forestille sig, at denne løsningskurve ville blive *tiltrukket* af det stationære punkt, og nærme sig dette med tiden, dvs. at

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x_s} \text{ for } t \to \infty. \tag{3.5}$$

Hvis (3.5) indtræffer for alle begyndelsesbetingelser med $\mathbf{v}$ tilstrækkelig tæt på $\mathbf{x}_s$, så siges det stationære punkt at være *asymptotisk stabilt.* Ved brug af afstandsbegrebet (den såkaldte norm) i (2.42) kan vi give en præcis definition; den er temmelig teknisk, så den vil efterfølgende blive forklaret med ord fremfor symboler.

**Definition 3.6 (Stabilitet for ulineært system)**

*(i) Et stationært punkt* $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ *siges at være stabilt hvis der for ethvert* $\epsilon > 0$ *findes et* $\delta > 0$ *således at hvis* $\mathbf{x}(t)$ *er en løsning for hvilken* $||\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_s|| < \delta$*, så er* $||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s|| < \epsilon$ *for alle* $t > 0$.

*(ii) Et stationært punkt* $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ *siges at være asymptotisk stabilt hvis det er stabilt, og der findes et* $\delta > 0$ *således at hvis* $\mathbf{x}(t)$ *er løsning og*

$$||\mathbf{x}(0) - \mathbf{x_s}|| < \delta,$$

*så vil*

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x_s} \text{ for } t \to \infty.$$

*Hvis et stationært punkt ikke er stabilt, siges det at være ustabilt.*

I ord siger definition 3.6 følgende:

- Et stationært punkt $\mathbf{x}_s$ er stabilt hvis enhver løsning der starter tilstrækkelig tæt på $\mathbf{x}_s$ vil befinde sig tæt på $\mathbf{x}_s$ til alle senere tidspunkter;
- Et stationært punkt er asymptotisk stabilt hvis enhver løsning der starter tæt på $\mathbf{x}_s$ vil nærme sig $\mathbf{x}_s$ når tiden går.

Bemærk at ordvalget præcis svarer til den geometriske fornemmelse som opnås ved at betragte figur 2.27.

Vi vil nu formulere et resultat, der viser, at stabilitetsforholdende for autonome ulineære differentialligningssystemer kan afgøres ved metoder svarende til vores stabilitetsundersøgelse i afsnit 2.8. Givet funktionen $\mathbf{f}$, defineres *funktionalmatricen* i punktet $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ved

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Denne matrix kaldes også *Jacobi-matricen*. Der gælder nu følgende vigtige resultat.

**Sætning 3.7 (Stabilitet for ulineært system)**

*(i) Et stationært punkt* $\mathbf{x}_s$ *er ustabilt hvis* $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s)$ *har en egenværdi med positiv realdel.*

*(ii) Et stationært punkt* $\mathbf{x}_s$ *er asymptotisk stabilt hvis alle egenværdier for* $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s)$ *har negativ realdel.*

Undersøgelsen af om et stationært punkt er asymptotisk stabilt foregår altså på samme måde som da vi undersøgte et lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, se sætning 2.36, blot med matricen $\mathbf{A}$ erstattet af funktionalmatricen. Vi bemærker dog at tilfældet hvor en egenværdi har realdel nul kan være kompliceret, og ikke altid dækkes af ovenstående sætning.

**Eksempel 3.8** Differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2, \\ \dot{x}_2 = & x_1 + x_1 x_2 \end{cases}$$

er af typen (3.2), med

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Da funktionen $\mathbf{f}$ er ulineær, er der tale om et ulineært autonomt system. For at finde stationære punkter betragtes ligningen

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \mathbf{0}.$$

Det ses at den eneste løsning hertil er $(x_1, x_2) = (0, 0)$, der således er det eneste stationære punkt.

Funktionalmatricen er

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

så i det stationære punkt er

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egenværdierne for $D\mathbf{f}(0, 0)$ er $\lambda = \pm 1$; det stationære punkt $(0, 0)$ er altså ustabilt. Betragt igen faseportrættet på figur 3.3. Vi ser, at (nogle af) løsningskurverne bliver frastødt når de nærmer sig det stationære punkt $(0, 0)$; dette harmonerer med at det stationære punkt er ustabilt. □

I eksempel 3.13 diskuteres et konkret ulineært differentialligningssystem i forbindelse med populationsgenetik, baseret på ovenstående metoder.

## 3.2 1-dimensionale autonome systemer

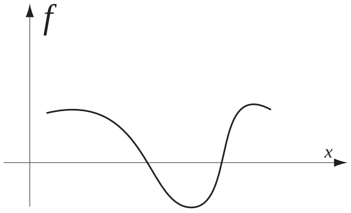
Et 1-dimensionelt autonomt differentialligningssystem består blot af én ligning, som har formen

$$\dot{x} = f(x(t)),$$

eller kort,

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.6}$$

Da "systemet" (3.6) blot består af én ligning, består faseportrættet af kurver, der forløber på $x$-aksen. Lad os f.eks. betragte funktionen $f$ på figur 3.9. For de værdier af $x$ hvor $f(x)$ er positiv viser (3.6) at $\dot{x} > 0$; derfor er $x(t)$ en voksende funktion af tiden. Tilsvarende ses, at for de $x$ hvor $f(x)$ er negativ, vil $x(t)$ være en aftagende funktion af tiden. For de værdier af $x$ for hvilke $f(x) = 0$ har vi de *stationære punkter*, dvs. værdier af $x$ som fastholdes af løsningen fordi $\dot{x} = 0$. På figur 3.10 har vi markeret områder hvor $f$ er positiv med pile der peger mod voksende $x$-værdier, og områder hvor $f$ er negativ med pile der peger mod aftagende $x$-værdier.




**Figur 3.9** *En funktion $f$.*

**Figur 3.10** *Faseportrættet hørende til funktionen $f$. Hvor funktionen $f$ er positiv går fasestrømmen mod voksende $x$. Hvor funktionen er negativ går fasestrømmen mod aftagende $x$. Hvor funktionen $f$ har nulpunkter har fasestrømmen et stationært punkt.*

De stationære punkter er på figur 3.10 markeret på to forskellige måder. Det ene er markeret med en udfyldt cirkel: her gælder, at en begyndelsesbetingelse i umiddelbar nærhed af punktet vil føre til en løsningskurve, der nærmer sig det stationære punkt når tiden går. Der er altså tale om et asymptotisk stabilt stationært punkt. Det andet stationære punkt er markeret med en åben cirkel: en begyndelsesbetingelse i nærheden af dette punkt vil lede til en løsningskurve der fjerner sig fra punktet. Punktet er altså ustabilt.

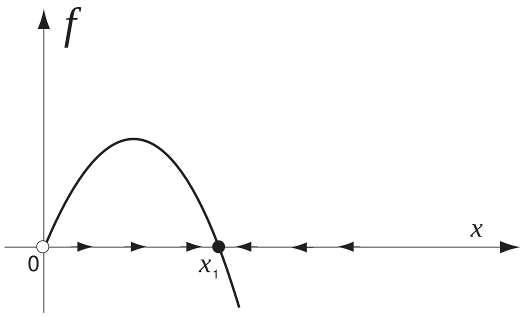
Vi ser, at et stationært punkt er asymptotisk stabilt når $f$ er positiv til venstre for punktet og negativ til højre for punktet, eller mere præcist når $f'$ er negativ i det stationære punkt. Hvis $f'(x)$ er positiv i det stationære punkt er det ustabilt.

Det er altså værdien af $f'(x_s)$, den lineære del af $f$ evalueret i det stationære punkt $x_s$, der afgør det stationære punkts stabilitet. Vi bemærker, at $f'(x_s)$ netop er den én-dimensionelle udgave af funktionalmatricen; så vi har hermed argumenteret for den 1-dimensionale udgave af sætning 3.7.

**Eksempel 3.11 (Den logistiske ligning)** Hvis en population af levende væsner har tilstrækkelig forsyning af føde vil antallet af individer undergå eksponentiel vækst. Hvis $x$ betegner antallet af individer (fx mus i en lade) gælder da at tilvæksten er proportional med antallet ("jo flere der er, jo flere bliver født"), altså

$$\dot{x} = a\,x,$$

hvor $a$ er en positiv konstant, kaldet vækstraten. Denne ligning er lineær.




**Figur 3.12** *Funktionen* $f(x) = a(1 - \frac{x}{x_1})\,x$ *og det tilhørende faseportræt, tegnet i samme koordinatsystem.*

Dens løsning er den velkendte eksponentielle vækst

$$x(t) = x_0 e^{at},$$

hvor $x_0 = x(0)$. Denne model er kun realistisk for små tidsrum; i praksis vil der altid indtræde en ændring i modellen når forsyningen af føde begynder at slippe op. Vi kan modellerer denne afhængighed ved at erstatte vækstraten $a$ med den *effektive vækstrate* $a(1 - x/x_1)$ for et passende $x_1 > 0$.

Den effektive vækstrate bliver således mindre når $x$ vokser: den er 0 når $x = x_1$ og den bliver negativ (svarende til aftagende population) hvis $x > x_1$. Nu ser ligningen således ud:

$$\dot{x} = a(1 - \frac{x}{x_1})\,x \tag{3.7}$$

Der er således tale om et autonomt ulineært "system" bestående af en enkelt ligning, den såkaldte *den logistiske ligning*. Den logistiske ligning svarer til at vi i den generelle teori har

$$f(x) = a(1 - \frac{x}{x_1})\,x. \tag{3.8}$$

Vi bemærker at ligningen (3.7) faktisk kan løses eksplicit ved hjælp af klassiske metoder (separation af variable). Det er dog illustrativt at undersøge ligningen via de metoder vi har diskuteret i dette kapitel.

De stationære punkter er

$$x_s = 0 \text{ og } x_s = x_1.$$

Vi bemærker, at

$$f'(x) = a(1 - 2x/x_1);$$

da $f'(x_1) = -a < 0$ er det stationære punkt $x_s = x_1$ asymptotisk stabilt. Da $f'(0) = a > 0$ er $x_s = 0$ ustabilt.

Figur 3.12 viser funktionen $f$ og det tilhørende faseportræt; stabilitetsforholdene for de stationære punkter kan også aflæses heraf. En begyndelsesværdi lidt større end 0 vil vokse op til, men vil ikke passere, ligevægtsværdien $x_1$. På lignende måde vil en begyndelsesværdi større end $x_1$ aftage mod, men aldrig passere, værdien $x_1$.

Vi vil nu diskutere en såkaldt *linearisering* af den logistiske ligning. Herved forstås, at den ulineære funktion $f$ erstattes af en lineær funktion i differentialligningen.

I det stationære punkt $x = 0$ er $f'(0) = a$. For $x$-værdier tæt på $x = 0$ kan vi ved hjælp af Taylors grænseformel approksimere funktionen $f$ via

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0) = ax.$$

Hvis vi nu tillader os at erstatte funktionen $f(x)$ med $ax$ i (3.7), så fås som nævnt løsningen

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

hvor $x_0 = x(0)$. Det er rimeligt at forvente, at løsningen til (3.7) opfører sig som denne for små $x$-værdier: løsningen bevæger sig således eksponentielt *væk* fra det stationære punkt; punktet er dermed ustabilt.

Tilsvarende kan vi nær punktet $x = x_1$ approksimere funktionen $f$ via

$$f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = -a(x - x_1).$$

Hvis vi igen erstatter funktionen $f$ i (3.8) med funktionen $-a(x - x_1)$, så fås differentialligningen

$$\dot{x} = -a(x - x_1).$$

Den har en løsning givet ved

$$(x(t) - x_1) = (x_0 - x_1)e^{-at},$$

dvs.

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1)e^{-at},$$

hvor $x_0 = x(0)$. Det ses, at

$$x(t) \to x_1 \text{ for } t \to \infty.$$

Det er igen naturligt at forvente, at løsningen til (3.8) vil opføre sig på tilsvarende måde; dette betyder, at det stationære punkt $x_1$ er asymptotisk stabilt.

Vi har dannet os et overblik over løsningerne til den logistiske ligning uden at løse ligningen eksplicit. Denne lidt anderledes måde at arbejde med differentialligninger, hvor man lægger vægt på den kvalitative og globale opførsel, repræsenterer et vigtigt værktøj ikke mindst i studiet af systemer med flere variable. Metoden blev udviklet af den franske matematiker H. Poincaré (1854 - 1912). □

## 3.3 2-dimensionale autonome systemer

Et 2-dimensionelt autonomt system har formen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Som vi har set bestemmes de stationære punkter $(x_1, x_2)$ af ligningerne

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Igen er det funktionalmatricen, altså den lineære del af funktionen $\mathbf{f}$, der afgør det stationære punkts karakter. Det er funktionalmatricens egenværdier (og egenvektorer) der bestemmer opførslen af løsningskurverne, de såkaldte *fasestrømme,* i nærheden af de stationære punkter. Når egenværdierne og egenvektorerne er fundet for hvert stationært punkt kan man indtegne fasestrømmen omkring hvert af de stationære punkter.

I et $(x_1, x_2)$-plot indtegnes de særlige løsningskurver der begynder og ender på de stationære punkter. Disse kurver fungerer som skillelinjer mellem områder af $(x, y)$-planen og kaldes af den grund *separatricer*. Inden for hvert af de områder som separatricerne skiller planen i kan man nu skitsere fasestrømmen.

Det følgende er et eksempel på dette.

**Eksempel 3.13** Vi betragter to populationer: et antal mus $x$, og et antal kaniner $y$. Vi betragter en model hvor ændringerne i de to populationer er givet ved følgende system af differentialligninger:

$$\begin{cases} \dot{x} = & (3 - x)x - 2xy \\ \dot{y} = & (2 - y)y - xy \end{cases}$$

De første led på højresiderne viser at begge arter vil undergå logistisk vækst, men derudover er der nogle koblingsled til stede som, da de er produkter af de to populationer $x$ og $y$, kan fortolkes som en konsekvens af sammenstød mellem de to arter. For begge arter gælder at sammenstød hæmmer væksten ($xy$- leddet har negativt fortegn), vi har dog ladet det gå værst ud over musene (det negative led på $x$-højresiden er dobbelt så stort). De to arter konkurrerer om samme ressourcer, men hæmmes af tilstedeværelsen af alt for mange af den anden art.

Vores analyse begynder som altid med at finde de stationære punkter: de er i dette tilfælde bestemt af ligningerne

$$(3 - x - 2y)x = 0, \quad (2 - y - x)y = 0. \tag{3.9}$$

Den første ligning er tilfredsstillet når $x = 0$; i dette tilfælde er den anden ligning opfyldt for $y = 0$ og for $y = 2$. Tilsvarende fås for $y = 0$ løsningerne $x = 0$ og $x = 3$. For $x \neq 0$ og $y \neq 0$ leder (3.9) til ligningerne

$$3 - x - 2y = 0, \quad 2 - y - x = 0,$$

der er opfyldt for $(x, y) = (1, 1)$. De stationære punkter er således

$$(0,0), (0,2), (3,0) \text{ og } (1,1).$$

Funktionalmatricen er

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & 2-x-2y \end{pmatrix}.$$

For hvert af de stationære punkter evaluerer vi funktionalmatricen og udregner de to egenværdier:

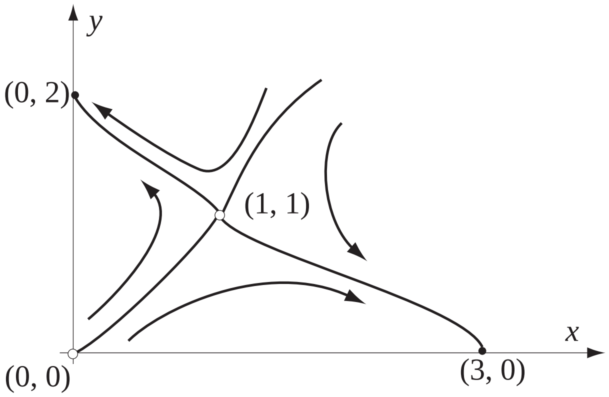
$$\begin{aligned}
D\mathbf{f}(0,0) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{har egenværdierne} \quad \lambda = 3 \quad \text{og} \quad \lambda = 2; \\
D\mathbf{f}(0,2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \text{har egenværdierne} \quad \lambda = -1 \quad \text{og} \quad \lambda = -2; \\
D\mathbf{f}(3,0) &= \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{har egenværdierne} \quad \lambda = -3 \quad \text{og} \quad \lambda = -1; \\
D\mathbf{f}(1,1) &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{har egenværdierne} \quad \lambda = -1+\sqrt{2},\ \lambda = -1-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Det stationære punkt $(0,0)$ er ikke asymptotisk stabilt; $(3,0)$ og $(0,2)$ er asymptotisk stabile. Det mest interessante stationære punkt er $(1,1)$ med én positiv og én negativ egenværdi. Et sådan stationært punkt (kaldet et *saddelpunkt*); det har den egenskab, at nogle begyndelsebetingelser nær punktet vil lede til løsningskurver der tiltrækkes af punktet, mens andre løsningskurver frastødes.

Vi kan nu stykke alle disse informationer sammen til et komplet faseportræt.

Vi ser fra figuren at saddelpunktet deler planen i to områder. Alle begyndelsesværdier i det øverste venstre område ender før eller siden i det stationære punkt $(0,2)$. Alle begyndelsesværdier i det nederste højre område ender før eller siden i punktet $(3,0)$. Kun hvis en begyndelsesværdi er placeret nøjagtig på den løsningskurve der løber fra $(0,0)$ til $(1,1)$ vil løsningen nærme sig $(1,1)$. For alle andre begyndelsesværdier ender systemet i en tilstand hvor den ene eller den anden variabel er lig 0.

Den biologiske konklusion er at denne model ikke kan forklare forskellige arter, der eksisterer samtidig og konkurrerer om den samme mængde føde; for modellen forudsiger at den ene eller den anden (afhængig af begyndelsesbetingelserne) af arterne vil uddø. □




**Figur 3.14** *Faseportrættet for et system der beskriver to konkurrerende arter $x$ og $y$. Næsten alle begyndelsesværdier fører til en situation hvor kun den ene art er til stede.*

## 3.4 Systemer af dimension 3 eller højere. Kaos.

I princippet, og nogen gange i praksis, kan man fortsætte det program som er diskuteret i de to foregående afsnit. Man kan visualisere faserumsstrømmen også i 3 dimensioner (for dimensioner højere end 3 bliver man nødt til at visualisere grupper af højst tre variable af gangen). Man må forvente at kompleksiteten af denne analyse stiger med stigende dimension.

Analysen af ulineære systemer af orden 3 eller højere kan imidlertid også blive vanskeliggjort af et fænomen der slet ikke optræder i lavere dimensioner: *kaos*. Da vi her diskuterer differentialligningssystemer der er deterministiske (dvs. deres løsning er entydigt bestemt af begyndelsesbetingelserne) benævnes denne opførsel lidt mere præcist *deterministisk kaos*.

Man siger, at *et system udviser deterministisk kaos hvis systemets opførsel over lange tidsrum er aperiodisk med stærk afhængighed af begyndelsesbetingelserne.*

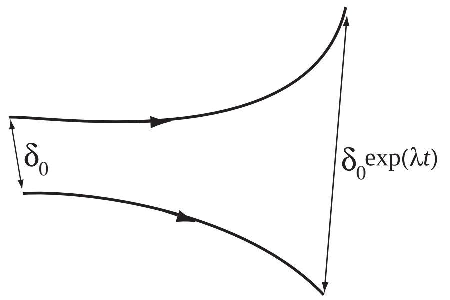
Flere punkter i denne definition må præciseres. For det første skal ‘lange tidsrum’ tillægges en mening. Her antages det at der til systemet kan knyttes en ‘naturlig’ tidsskala. Den naturlige tidsskala kan fastlægges på baggrund af kriterier afhængig af den fysiske situation der modelleres. Her vil man danne en tidsskala ud fra en karakteristisk rumlig skala og en typisk hastighed der optræder i systemer. Et tidsrum kaldes ‘langt’ hvis det er stort i forhold til den ‘naturlige’ tid.

Med ‘stærk afhængighed’ af begyndelsesbetingelserne menes at tætliggende begyndelsesbetingelser leder til løsningskurver, der fjerner sig eksponentielt

hurtigt fra hinanden. Man kan vise at der i sådanne systemer for tilstrækkeligt små værdier af $\delta_0$ gælder, at to begyndelsesbetingelser der til tiden $t = 0$ er adskilt med $\delta_0$, vil lede til løsningskurver, der fjerner sig fra hinanden så de til (også for tilstrækkelig små tider) $t$ vil være adskilt af $\delta_0 \exp(\lambda t)$. Se figur 3.15.

Konstanten $\lambda$ kaldes Liapunov-eksponenten, og det er en betingelse for eksponentiel spredning at $\lambda > 0$.

Når et system udviser en sådan eksponentiel spredning af begyndelsesbetingelserne bliver det meget vanskeligt at forudsige systemets opførsel. Selv en lille usikkerhed i kendskabet til begyndelsesbetingelserne bliver forstørret af den eksponentielle spredning. Selv om systemet opførsel er éntydigt bestemt af begyndelsesbetingelserne bliver det næsten umuligt at fremskrive (forudsige) systemets opførsel mere end få tidsenheder frem.




**Figur 3.15** *Eksponentiel adskillelse af begyndelsesbetingelser. To begyndelsesværdier, hvis afstand til tiden $t = 0$ er lig $\delta_0$, leder til løsningskurver, der fjerner sig eksponentielt hurtigt fra hinanden.*

**Eksempel 3.16** Antag at vi ønsker at angive en variabel $x$ med en nøjagtighed bedre end $10^{-3}$. Lad os først antage at vi måler begyndelsesværdien af $x$ med en nøjagtighed på $10^{-7}$. Hvor langt frem i tiden kan vi fremskrive $x$ før den oprindelige usikkerhed på $10^{-7}$ er blevet forstørret til $10^{-3}$? Hvis $\lambda$ er Liapunoveksponenten spørger vi altså hvornår den oprindelige usikkerhed på $10^{-7}$ er vokset til $10^{-3}$:

$$10^{-3} = 10^{-7} e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad t = 4\frac{\ln(10)}{\lambda}$$

Hvis vi nu i et forsøg på at forøge denne tid gør vores begyndelsesmålinger en million gange mere nøjagtige, så vi bestemmer begyndelsesværdien med en nøjagtighed på $10^{-13}$, så vil der gå et tidsrum på

$$t = 10\frac{\ln(10)}{\lambda}$$

før denne værdi er blevet lige så usikker som den første. Bemærk, at en million gange større præcision i bestemmelsen af begyndelsesværdierne kun har forøget forudsigelsestiden med en faktor 2.5 ! □

**Eksempel 3.17 (Lorenz attraktoren)** Ligningssystemet

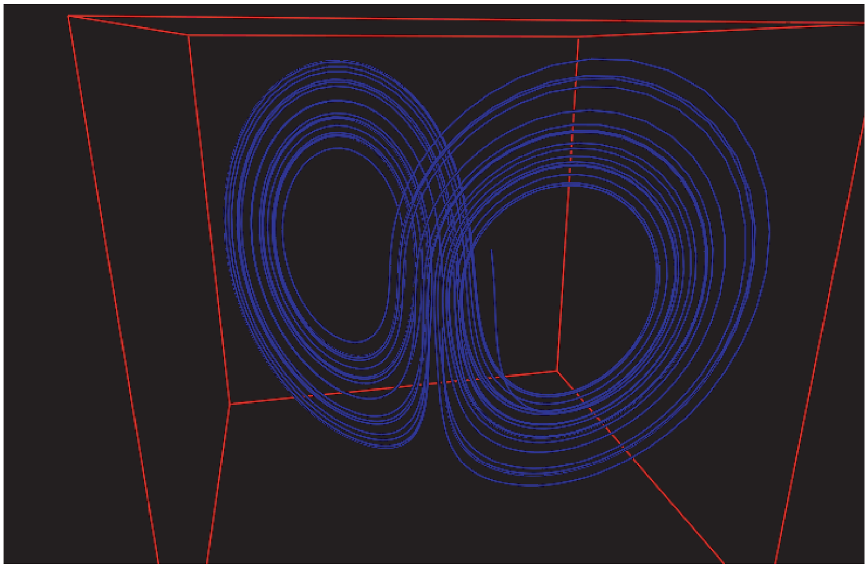
$$\begin{aligned} \dot{x} &= s(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{3.10}$$

blev først studeret af meterologen E. Lorenz som en stærkt simplificeret model af atmosfæiske strømninger. Konstanterne $s$, $r$ og $b$ er dimensionløse parametre hvis numeriske værdier i høj grad bestemmer systemets opførsel.

Det mest bemærkelsesværdige fænomen ved Lorenz-systemet (3.10) er, at der for visse parameterværdier optræder deterministisk kaos i systemet; alle banekurver drages hen imod et begrænset område i $(x, y, z)$-rummet (en såkaldt *attraktor*), men bevægelsen inden for dette område er kaotisk, og områdets geometri er kompliceret (attraktoren kaldes i et sådant tilfælde sær (eng: strange)). Tilsvarende fænomener er senere registreret for mange andre systemer. På figur 3.18 ses et computergenereret billede af et antal banekurver der forløber på den sære attraktor. Man ser at den har form omtrent som to skiver der er bøjet i forhold til hinanden. Computeranimationer kan vise bevægelsen på selve attraktoren og specielt den store følsomhed på begyndelsesbetingelserne.

Som vi har set i eksemplet ovenfor har følsomheden på begyndelsesbetingelserne betydning for modellens nytte som forudsiger af løsningsværdier (eksempelvis som vejrudsigter) ud fra givne begyndelsesværdier (eksempelvis meterologiske målinger). Da sådanne målinger nødvendigvis er behæftet med usikkerhed vil den eksponentielle spredning meget hurtigt forstørre usikkerheden så den bliver uacceptabel. I praksis er det derfor vanskeligt at forudsige tidsudviklingen af kaotiske systemer. □

Ulineære systemer er et centralt tema i flere videregående kurser på DTU, bl.a. 01617, *Dynamiske systemer I* og 01618, *Dynamiske systemer II.* Vi henviser til lærebøgerne [14] og [16], der også har dannet udgangspunkt for dette afsnit.



**Figur 3.18** *Lorenz-attraktoren. For visse parameterværdier vil et begrænset område af* $(x, y, z)$*-rummet (en attraktor) tiltrække baner som derefter forløber på attraktoren. Attraktorens geometri er kompliceret, og den kaldes derfor en sær attraktor.*

# Kapitel 4
## Uendelige rækker med konstante led

Løst sagt handler teorien for uendelige rækker om hvordan man kan addere uendeligt mange tal eller uendeligt mange funktioner. Umiddelbart virker dette meget abstrakt, men i kapitel 7 vil vi se at teorien blandt andet leder til nyttige metoder for løsning af differentialligninger.

For at kunne tage fat på teorien for uendelige rækker skal vi have et par andre begreber på plads. I afsnit 4.1 vil vi således give en kort introduktion til uegentlige integraler, som for eksempel optræder når man skal integrere en funktion over hele den reelle akse. Herefter diskuterer vi talfølger (og konvergens heraf) i afsnit 4.2. Talfølger, eller rettere følger af funktioner, optræder naturligt i forbindelse med Taylors sætning, som behandles i afsnit 4.3. Både afsnit 4.2 og afsnit 4.3 motiverer definitionen af en uendelige række i afsnit 4.4. I afsnit 4.4 betragtes en uendelig følge af tal $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$ og vi giver (under visse antagelser) en formel definition af summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Et udtryk af denne type kaldes en uendelig række; og rækker, for hvilke det er muligt at knytte en sum, siges at være konvergente. Afsnit 4.5 behandler de såkaldte konvergenskriterier, der bruges til at undersøge om en forelagt række er konvergent eller ej. Afsnit 4.6 beskriver nogle metoder til approksimativ bestemmelse af summen af en uendelig række med positive led; det tilsvarende problem for alternerende rækker, dvs. rækker hvor leddene skifter fortegn i hvert trin, er behandlet i afsnit 4.7.

## 4.1 Uegentlige integraler

I forbindelse med teorien for uendelige rækker får vi brug for at integrere funktioner $f$ over uendelige intervaller. Et typisk eksempel herpå er et integral af formen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \tag{4.1}$$

hvor $a \in \mathbb{R}$ er et givet tal. Integraler af typen (4.1) indføres ved at man først betragter integraler over endelige intervaller af typen

$$\int_a^t f(x)\,dx,$$

og herefter lader $t$ gå mod uendelig:

**Definition 4.1 (Uegentligt integral)** *Lad $a \in \mathbb{R}$, og betragt en stykkevist kontinuert funktion $f : [a, \infty[ \to \mathbb{C}$.*

*(i) Antag at integralet $\int_a^t f(x)\,dx$ har en grænseværdi for $t \to \infty$. Så siges integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$ at være konvergent, og vi sætter*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx. \tag{4.2}$$

*(ii) Hvis integralet $\int_a^t f(x)\,dx$ ikke har en grænseværdi for $t \to \infty$, siges integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$ at være divergent.*

**Eksempel 4.2** Vi undersøger om integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

er konvergent eller divergent. Til det formål beregner vi først

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^t x^{-2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Idet $1 - \frac{1}{t} \to 1$ for $t \to \infty$, kan vi slutte at $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ er konvergent, og at

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$ □

Ofte optræder der en parameter, der skal bestemmes således at et givet integral bliver konvergent:

**Eksempel 4.3** Lad $b \in \mathbb{R}$. Vi vil finde de værdier af $b$ for hvilke integralet

$$\int_1^\infty e^{bx}\,dx$$

er konvergent.

Vi bemærker først at integralet er divergent for $b = 0$ (check det!). For $b \neq 0$ fås at

$$\int_1^t e^{bx}\,dx = \frac{1}{b}\,\left[e^{bx}\right]_{x=1}^t = \frac{1}{b}\,\left(e^{bt} - e^b\right). \tag{4.3}$$

For $b < 0$ gælder at $e^{bt} \to 0$ for $t \to \infty$. Derfor er $\int_1^\infty e^{bx}\,dx$ konvergent for $b < 0$, og

$$\int_1^\infty e^{bx}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{bx}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{b}\,\left(e^{bt} - e^b\right) = \frac{1}{b}\,\left(0 - e^b\right) = -\,\frac{e^b}{b}.$$

For $b > 0$ ses at $e^{bt} \to \infty$ for $t \to \infty$. Derfor viser (4.3) at

$$\int_1^t e^{bx}\,dx = \frac{1}{b}\,\left(e^{bt} - e^b\right) \to \infty \text{ for } t \to \infty.$$

Derfor er integralet $\int_1^\infty e^{bx}\,dx$ divergent for $b > 0$. □

## 4.2 Talfølger

Vi skal i dette afsnit beskrive det teoretiske fundament for uendelige rækker. Til det formål har vi brug for begrebet *talfølge.* Vi vil først indføre *endelige talfølger.* En endelig talfølge består af en mængde tal, der er ordnede og stillet op på listeform, altså

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\} \tag{4.4}$$

for et passende $N \in \mathbb{N}$. Talfølger indgår naturligt i alle beregningsprogrammer. Dette illustreres af det følgende eksempel.

**Eksempel 4.4** Ethvert beregningsprogram kan kun arbejde med endeligt mange tal, så for beregninger involverende funktioner $f$ må man i praksis begrænse sig til at betragte endeligt mange funktionsværdier. Hvis vi for eksempel ser på funktionen

$$f(x) = x^2,\ x \in [0, 10],$$

er det naturligt at betragte den endelige talfølge som man får ved at udregne $f(x)$ for $x = 0, 1, \ldots, 10$. Sættes $x_n := f(n)$, er der tale om talfølgen

$$\{x_n\}_{n=0}^{10} = \{f(0), f(1), \ldots, f(10)\}.$$

Man siger at følgen $\{x_n\}_{n=0}^{10}$ fremkommer ved *sampling* ("aftastning") af funktionen $f$, med *samplingspunkterne* $0, 1, \ldots, 10$. Hvis man har brug for mere præcis information om funktionen $f$ vil man normalt vælge at formindske afstanden mellem samplingspunkterne, og betragte talfølger af formen $x_n = f(an)$ for et passende lille tal $a$. Betragtes f.eks. $a = 10^{-4}$, fås talfølgen

$$\{x_n\}_{n=0}^{10000} = \{f(0), f(\frac{1}{10000}), f(\frac{2}{10000}), \ldots, f(1), \ldots, f(10)\}.$$

Bemærk at antallet af led i talfølgen øges betragteligt når afstanden mellem samplingspunkterne formindskes. □

I forbindelse med teorien for uendelige rækker har vi brug for at betragte talfølger bestående af uendeligt mange tal. Antag at vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ har defineret et tal $x_n \in \mathbb{C}$. Vi kan igen opstille tallene $x_n$ på listeform, altså på formen

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}. \tag{4.5}$$

Formelt siges $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\}$ at udgøre en *uendelig talfølge.* Som kort skrivemåde herfor benyttes

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} := \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}. \tag{4.6}$$

Ofte er vi lidt mere uformelle, og taler om talfølgen $x_n,\ n \in \mathbb{N}$.

I forbindelse med anvendelsen af talfølger indenfor uendelige rækker får vi brug for den følgende definition.

**Definition 4.5** *En talfølge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ siges at være konvergent hvis der findes et tal $s \in \mathbb{C}$ således at*

$$x_n \to s \text{ for } n \to \infty. \tag{4.7}$$

*I bekræftende fald siges $s$ at være grænseværdien for følgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, og vi skriver*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s.$$

*En talfølge der ikke er konvergent, siges at være divergent.*

Intuitivt betyder betingelsen (4.7) at tallene $x_n$ kommer tættere og tættere på $s$ for større og større værdier af $n$. Matematisk kan dette udtrykkes ved at der for ethvert $\epsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|s - x_n| \leq \epsilon$$

når blot $n \geq N$. I rent symbolsprog skrives dette

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \ n \geq N \Rightarrow |s - x_n| \leq \epsilon. \tag{4.8}$$

**Eksempel 4.6** Betragt talfølgen

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Både tæller og nævner går mod uendelig når $n \to \infty$, så vi kan ikke umiddelbart afgøre om talfølgen er konvergent. Men ved at udføre divisionen med $n$ ses at

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1 \text{ for } n \to \infty.$$

Talfølgen $x_n$ er altså konvergent med grænseværdi 1. □

**Eksempel 4.7** Betragt talfølgen

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Igen er vi i den situation at både tæller og nævner går mod uendelig for $n \to \infty$. Ved division med $n$ ses at

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2+1/n}{1+1/n} \to \frac{2}{1} = 2 \text{ for } n \to \infty.$$

Vi kan altså direkte aflæse at talfølgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi $s = 2$. Lad os alligevel checke at dette er i overensstemmelse med den formelle definition i (4.8). Først bemærkes at med $s = 2$ er

$$\begin{aligned} |s - x_n| = \left|2 - \frac{2n+1}{n+1}\right| = \left|\frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{2n+1}{n+1}\right| &= \left|\frac{2(n+1)-(2n+1)}{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Givet $\epsilon > 0$ kan vi nu se at uligheden $|s - x_n| \leq \epsilon$ er opfyldt når $\frac{1}{n+1} \leq \epsilon$, det vil sige når

$$n \geq \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Definition 4.5 er altså tilfredsstillet for ethvert valg af $N \in \mathbb{N}$ som er større end $\frac{1}{\epsilon} - 1$, og vi konkluderer atter at talfølgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod $s = 2$. □

Grænseværdibetragtninger kan ofte gennemføres med kendskab til de elementære funktioners opførsel. Ofte er det endvidere en god ide at skrive de første led i talfølgen op:

**Eksempel 4.8** Vi vil undersøge konvergensforholdene for følgende talfølger:

(i) $x_n = \cos(n\pi/2), \;\; n \in \mathbb{N};$

(ii) $x_n = 2^{-n}, \;\; n \in \mathbb{N};$

(iii) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $x_n = \frac{2^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Talfølgen i (i) består af tallene

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\cos(n\pi/2)\}_{n=1}^{\infty} = \{\cos\frac{\pi}{2},\ \cos\pi, \cos\frac{3\pi}{2}, \dots\} = \{0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}.$$

Det ses at talfølgen består i en periodisk gentagelse af tallene $0, -1, 0, 1$. Talfølgen er således divergent.

For talfølgen i (ii) ses at

$$x_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}.$$

Da $2^n \to \infty$ for $n \to \infty$ ser vi at $x_n \to 0$ for $n \to \infty$. Talfølgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er således konvergent med grænseværdi 0.

Talfølgen i (iii) er mere kompliceret. Både funktionen i tælleren og funktionen i nævneren går mod uendelig for $n \to \infty$, så som udgangspunkt er det svært at udtale sig om konvergensforholdene for brøken. Men vi bemærker at funktionen i tælleren, altså $n^2$, er en potensfunktion, mens funktionen i nævneren er en eksponentialfunktion. Som bekendt (se evt. størrelsesforholdene angivet på bogens cover) gælder i intuitiv forstand at den eksponentielle vækst er væsentligt hurtigere end væksten for en potensfunktion. Teknisk udtrykkes dette ved at

$$\frac{n^2}{2^n} \to\ 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Talfølgen i (iii) er således konvergent med grænseværdi 0.

Vi bemærker til slut at talfølgen i (iv) "ligner"talfølgen i (iii), og at placeringen af leddende i tæller og nævner blot er "omvendt."Heraf følger at

$$x_n = \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{\frac{n^2}{2^n}}. \tag{4.9}$$

Vi ved fra (iii) at $\frac{n^2}{2^n} \to 0$ for $n \to \infty$. Derfor viser (4.9) at

$$x_n \to \infty \text{ for } n \to \infty.$$

Talfølgen i (iv) er således divergent. □

Vi vil ofte undersøge talfølger, hvori der indgår en variabel $x$. I den forbindelse er problemstillingen normalt at bestemme de værdier af variablen der giver anledning til en konvergent talfølge.

**Eksempel 4.9** For $x \in \mathbb{R}$ betragter vi talfølgerne

(i) $x_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $x_n = \frac{\cos(nx)}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

For talfølgen i (i) ses at resultatet afhænger af den valgte værdi af $x$. Hvis vi betragter et $x \in ]-1, 1[$ gælder at

$$x_n = x^n \to 0 \text{ for } n \to \infty;$$

talfølgen er således konvergent med grænseværdi 0 i dette tilfælde. For $x = 1$ fås $x_n = 1^n = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og dermed en konvergent talfølge med grænseværdi 1. Omvendt, for $x = -1$ fås $x_n = (-1)^n$, som antager værdien 1 når $n$ er lige, og værdien $-1$ når $n$ er ulige. Talfølgen er således divergent.

For $x \notin [-1, 1]$, altså når $|x| > 1$, ses at $|x_n| \to \infty$ for $n \to \infty$. Derfor er talfølgen $x_n = x^n$ divergent.

Vi betragter nu talfølgen i (ii). Umiddelbart er konvergensforholdende ikke indlysende, da tælleren, altså $\cos(nx)$, er konvergent for vise værdier af $x$, og divergent for andre. Men i dette konkrete tilfælde er tællerens opførsel irrelevant! Nævneren, altså $2^n$, går jo mod uendelig for $n \to \infty$, og tælleren holder sig under alle omstændigheder indenfor intervallet $[-1, 1]$, som jo er værdimængden for cosinus-funktionen. Uanset om tælleren er konvergent eller ej, kan vi således konkludere at

$$x_n = \frac{\cos(nx)}{2^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Talfølgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er dermed konvergent med grænseværdi 0, uanset valget af $x \in \mathbb{R}$. □

Ved grænseværdibestemmelse er det ofte en fordel at splitte komplicerede udtryk op i mindre enheder og benytte følgende resultat. For beviset henvises til opgave 801 og opgave 802.

**Lemma 4.10** *Antag at talfølgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi $x$, og at talfølgen $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi $y$. Så gælder for vilkårlige tal $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ at talfølgen $\{\alpha x_n + \beta y_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi $\alpha x + \beta y$.*

**Eksempel 4.11** Betragt talfølgen

$$x_n = \frac{n+1}{n} + 2\cos(2^{-n}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Vi ved at

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1 \text{ for } n \to \infty.$$

Endvidere ses at $2^{-n} \to 0$ for $n \to \infty$, så

$$\cos(2^{-n}) \to \cos(0) = 1 \text{ for } n \to \infty.$$

Derfor vil

$$x_n = \frac{n+1}{n} + 2\cos(2^{-n}) \to 1 + 2 \cdot 1 = 3 \text{ for } n \to \infty.$$

Talfølgen $x_n,\ n \in \mathbb{N}$, er altså konvergent med grænseværdi 3. □

## 4.3 Taylors sætning

I Taylors sætning approksimeres en (uendeligt ofte) differentiabel funktion $f$ via polynomier $P_N,\ N \in \mathbb{N}$, af formen

$$\begin{aligned} &P_N(x) \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Polynomiet $P_N$ kaldes det *$N$'te Taylorpolynomium i punktet $x_0$*. Bemærk at for $N = 1$ er

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

som er ligningen for tangenten for $f$ i punktet $x_0$. For højere værdier af $N$ fås polynomier af højere grad, som normalt approksimerer $f$ endnu bedre for $x$ tæt på $x_0$. *Taylors formel* giver os et udtryk for forskellen mellem funktionen $f$ og det $N$'te Taylorpolynomium:

**Lemma 4.12 (Taylors formel)** *Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et interval, og antag at funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ er vilkårligt ofte differentiabel. Lad $x_0 \in I$ og $N \in \mathbb{N}$. Da findes for ethvert $x \in I$ et tal $\xi$ mellem $x$ og $x_0$ således at*

$$f(x) = P_N(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}.$$

*Taylors sætning* viser, at vi under visse omstændigheder kan finde et polynomium der er så tæt på $f$ som vi måtte ønske:

**Sætning 4.13 (Taylors sætning)** *Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et interval. Antag at funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ er uendelig ofte differentiabel og at der findes en konstant $C > 0$ således at*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq C \quad \textit{for alle } n \in \mathbb{N} \textit{ og alle } x \in I. \tag{4.10}$$

*Lad* $x_0 \in I$. *Så gælder for alle* $N \in \mathbb{N}$ *og alle* $x \in I$, *at*

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \leq \frac{C}{(N+1)!} |x-x_0|^{N+1}. \qquad (4.11)$$

*Hvis* $I$ *er et begrænset interval findes derfor, for vilkårlige* $\epsilon > 0$, *et* $N_0 \in \mathbb{N}$ *således at*

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \leq \epsilon \ \textit{ for alle } x \in I \textit{ og alle } N \geq N_0. \qquad (4.12)$$

Beviset for Taylors sætning findes i appendiks A.6.

Vi vil normalt antage at vi kan vælge $x_0 = 0$; under antagelserne i sætning 4.13 viser (4.12) derfor at vi kan approksimere $f$ vilkårligt godt med et polynomium af formen

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad (4.13)$$

ved at vælge graden $N$ tilstrækkelig stor.

Formel (4.11) kan bruges til at bestemme hvor mange led der skal tages med i Taylorpolynomiet for at opnå en ønsket approksimation:

**Eksempel 4.14** Betragt funktionen

$$f(x) = e^x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Denne funktion er uendelig ofte differentiabel, og

$$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = \cdots = e^x.$$

Det $N$'te Taylorpolynomium i punktet $x_0 = 0$ er

$$\begin{aligned} P_N(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!}x^N \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{N!}x^N \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}x^n. \qquad (4.14) \end{aligned}$$

Vi ønsker nu at finde 3 værdier af $N \in \mathbb{N}$, nemlig

(i) $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leq 0.015 \ \text{ for alle } x \in [-1,2]. \qquad (4.15)$$

(ii) $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leq 0.0015 \ \text{ for alle } x \in [-1,2]. \qquad (4.16)$$

(iii) $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leq 0.015 \text{ for alle } x \in [-5, 5]. \tag{4.17}$$

Vi bemærker først, at (4.11) involverer konstanten $C$ som blev indført i (4.10); vi kan lade $C$ være størsteværdien af alle afledede af $f$ på det betragtede interval (eller blot et tal, der vides at være større).

I (i) kan vi altså tage $C = e^2$. Betingelsen (4.11) viser nu at (4.15) er opfyldt hvis

$$\frac{e^2}{(N+1)!} 2^{N+1} \leq 0.015; \tag{4.18}$$

dette er opfyldt for alle $N \geq 8$.

I (ii) fås på tilsvarende vis en passende værdi for $N$ ved at erstatte tallet 0.015 i (4.18) med 0.0015; den resulterende ulighed er opfyldt for $N \geq 10$.

Bemærk, at i (iii) betragtes $f$ på et større interval. For at kunne finde en passende værdi for $N$ må vi vælge $C = e^5$; via (4.11) ledes vi herved til at betragte uligheden

$$\frac{e^5}{(N+1)!} 5^{N+1} \leq 0.015,$$

som er opfyldt for $N \geq 19$. □

I andre eksempler er det ofte noget mere kompliceret at finde de højere afledede af den givne funktion $f$ end det var i eksempel 4.14. Under betingelserne i sætning 4.13 vil man altid kunne opnå en ønsket approksimation ved at vælge graden $N$ af Taylorpolynomiet tilstrækkelig stor, men i praksis vil der altid være et "tradeoff" mellem hvor god approksimation man ønsker, og hvor meget regnekraft man vil investere (eller har til rådighed).

Eksempel 4.14 viser at jo bedre approksimation man ønsker, jo højere grad skal polynomiet $P$ i (4.13) have. Nu er der jo ikke noget der hedder et "polynomium af uendelig grad"; men man kunne jo spørge om man kunne opnå at $f(x) = P(x)$ hvis man havde lov til at inkludere "uendeligt mange led" i $P(x)$. Vi har endnu ikke defineret en sum af uendeligt mange led; men vores formål i næste kapitel er at vise, at mange funktioner faktisk kan repræsenteres på formen

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{4.19}$$

for passende koefficienter $c_n$. I øjeblikket er det langt fra klart hvorledes ovenstående uendelige sum skal fortolkes. De næste afsnit giver svaret herpå.

## 4.4 Uendelige rækker af tal

Vi begynder med at definere en uendelig sum af reelle (eller komplekse) tal $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

En *uendelig række* er rent formelt et udtryk af form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

hvor $a_n \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) for alle $n \in \mathbb{N}$. Tallene $a_n$ kaldes *leddene* i den uendelige række. Vi skal nu redegøre for hvorledes en uendelig række skal fortolkes. Til det formål defineres den $N'$te *afsnitssum* $S_N$, $N \in \mathbb{N}$, hørende til den givne uendelige række, ved

$$S_N := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n. \tag{4.20}$$

**Definition 4.15 (Konvergens af uendelig række)** *Lad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *være en uendelig række med afsnitssummer* $S_N$, $N \in \mathbb{N}$. *Hvis talfølgen* $S_N$ *er konvergent, dvs. hvis der findes et tal* $S$ *således at*

$$S_N \to S \text{ for } N \to \infty, \tag{4.21}$$

*så siges den uendelige række* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *at være konvergent med sum* $S$. *Dette skrives kort*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

*Hvis talfølgen* $S_N$, $N \in \mathbb{N}$, *er divergent, så siges* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *at være divergent. Til en divergent række knyttes ingen sum.*

Udtrykt i symboler betyder betingelsen (4.21) at der for ethvert givet $\epsilon > 0$ eksisterer et tal $N_0 \in \mathbb{N}$ således at

$$|S - S_N| \leq \epsilon \text{ for alle } N \geq N_0.$$

Bemærk, at definitionen på konvergens af en uendelig række kan udtrykkes direkte ved leddene $a_n$: at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum $S$ betyder at

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \to S \text{ for } N \to \infty.$$

Heraf ses, at det at betragte en uendelig række nøje svarer til intuitionen om at "lægge uendeligt mange tal sammen ved at addere flere og flere led".

Vi vil ofte betragte uendelige rækker startende med et led $a_0$ i stedet for $a_1$. Forskellen mellem rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

og

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

er blot, at vi for den sidstnævnte række har adderet tallet $a_0$; for spørgsmålet om hvorvidt rækken er konvergent eller ej er det altså irrelevant om vi starter med $n = 0$ eller $n = 1$ (eller for den sags skyld med $n = K$ for et givet naturligt tal $K$). I tilfælde af konvergens er

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Når en uendelig række starter med et led $a_N$ vil vi ofte benytte en ændring af summationsindexet, som beskrevet i følgende lemma:

**Lemma 4.16 (Ændring af summationsindex)** *Antag at rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *er konvergent. Så gælder for ethvert* $N \in \mathbb{N}$ *at*

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N}. \tag{4.22}$$

**Bevis:** Ved opskrivning af leddene på venstre side af (4.22) ses at

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = a_N + a_{N+1} + \cdots .$$

Ved at skrive leddene på højre side op, ses at der er tale om præcis den samme række. □

Vi vil ofte anvende nedenstående hjælperesultat.

**Lemma 4.17** *Antag at rækkerne* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *begge er konvergente. Da gælder for vilkårlige tal* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *at rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ *er konvergent, og*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

**Bevis:** Den $N'$te afsnitssum af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ er

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{N} a_n + \beta \sum_{n=1}^{N} b_n. \tag{4.23}$$

Ifølge definition 4.15 skal vi vise at

$$S_N \to \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ for } n \to \infty.$$

Per antagelse gælder at

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ for } N \to \infty$$

og

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ for } N \to \infty.$$

Ved at benytte lemma 4.10 kan vi nu via (4.23) konkludere at

$$S_N = \alpha \sum_{n=1}^{N} a_n + \beta \sum_{n=1}^{N} b_n \to \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ for } n \to \infty,$$

som ønsket. □

For at afgøre om en given række er konvergent eller ej bruges normalt de såkaldte konvergenskriterier, som vi vender tilbage til senere i dette afsnit. Undertiden kan spørgsmålet afklares direkte ved hjælp af definition 4.15:

**Eksempel 4.18** I dette eksempel betragter vi de uendelige rækker

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \cdots + n + \cdots;$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots;$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots;$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots.$

For den uendelige række i (i) er den $N$'te afsnitssum givet ved

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \cdots + N.$$

Heraf ses, at

$$S_N \to \infty \text{ for } N \to \infty$$

(man kan vise at $S_N = \frac{N(N+1)}{2}$ for alle $N \in \mathbb{N}$). Vi slutter at

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \quad \text{er divergent.}$$

Vi betragter nu den uendelige række i (ii). Den $N$'te afsnitssum er

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}.$$

Et geometrisk argument viser, at

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^N}. \tag{4.24}$$

Argumentet er som følger. Først bemærkes, at $S_1 = \frac{1}{2}$, hvilket er halvdelen af "afstanden" fra tallet 0 til tallet 1. Dette kan skrives som

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}.$$

Endvidere er $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$; det ekstra bidrag sammenlignet med $S_1$ er altså $\frac{1}{2^2}$, hvilket er halvdelen af afstanden fra $S_1$ til tallet 1. Går vi til det næste skridt og betragter $S_3$, vil afstanden til 1 igen forkortes med faktoren 2:

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3}.$$

Det samme sker i alle følgende trin: for $S_N$, er afstanden til tallet 1 præcis $1/2^N$, hvilket leder frem til (4.24). Det følger heraf at

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \to 1 \text{ for } N \to \infty;$$

vi konkluderer nu at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{er konvergent, og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

For rækken i (iii) bemærker vi først at

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$; derfor er den $N$'te afsnitssum givet ved

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

Da $S_N \to 1$ for $N \to \infty$, er rækken konvergent med sum 1.

For rækken i (iv) er

$$S_N = -1 + 1 + \cdots + (-1)^N = \begin{cases} -1 & \text{hvis } N \text{ er ulige} \\ 0 & \text{hvis } N \text{ er lige.} \end{cases}$$

Derfor har $S_N$ ikke nogen grænseværdi for $N \to \infty$. Vi slutter at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ er divergent. □

## 4.5 Konvergenskriterier for uendelige rækker

I dette afsnit indføres en række resultater, der ofte kan bruges til at afgøre om en forelagt uendelig række er konvergent eller divergent. Samlet kaldes disse resultater for *konvergenskriterier.*

Lad os først vende tilbage til eksempel 4.18(i), hvor vi så at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

er divergent. Intuitivt er "problemet" at leddene $a_n = n$ er "for store": når leddene $a_n$ vokser som i dette eksempel, forhindrer det afsnitssummen $S_N$ i at have en endelig grænseværdi når $N \to \infty$. En præcis formulering af dette intuitive udsagn leder til et nyttigt kriterium, som fortæller at en række kun har mulighed for at være konvergent hvis $a_n \to 0$ for $n \to \infty$; dette resultat kaldes *n'te ledskriteriet.*

**Sætning 4.19 ($n$'te ledskriteriet)** *Hvis* $a_n \nrightarrow 0$ *for* $n \to \infty$*, så er* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

**Bevis:** Antag at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum $S$. Pr. definition af afsnitssummerne betyder det at

$$S_N = a_1 + \cdots + a_N \to S \text{ for } N \to \infty.$$

Dermed gælder også at

$$S_{N-1} = a_1 + \cdots + a_{N-1} \to S \text{ for } N \to \infty;$$

dette implicerer at

$$a_N = S_N - S_{N-1} \to S - S = 0 \text{ for } N \to \infty. \qquad \square$$

En alternativ (men ækvivalent) formulering af sætning 4.19 siger at

hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så vil $a_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Det er vigtigt at bemærke, at sætning 4.19 højst kan give os en negativ konklusion: vi kan *aldrig* bruge $n$'te ledskriteriet til at slutte at en række er konvergent. Der er eksempler hvor $a_n \to 0$ for $n \to \infty$, og hvor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alligevel er divergent; se eksempel 4.34.

Intuitivt er det meget rimeligt at forvente, at hvis en række med positive tal er konvergent, så er en vilkårlig given række med mindre (og stadigvæk positive) led også konvergent: afsnitssummerne for rækken med de mindre led er jo begrænsede af afsnitssummerne af rækken med de større led, og kan altså ikke gå mod uendelig for $N \to \infty$. Den præcise formulering af dette resultat kaldes *sammenligningskriteriet*:

**Sætning 4.20 (Sammenligningskriteriet)** *Antag at* $0 \leq a_n \leq b_n$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$. *Så gælder følgende:*

(i) *Hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *er konvergent, så er også* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

(ii) *Hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er divergent, så er også* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergent.*

**Bevis:** Lad os betegne den $N$'te afsnitssum for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $S_N$, og den $N$'te afsnitssum for $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med $T_N$. Vi bemærker først, at antagelsen $0 \leq a_n \leq b_n$ medfører at

$$0 \leq S_N \leq T_N \tag{4.25}$$

for alle $N \in \mathbb{N}$. Hvis vi antager at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent med sum $T$, så følger det af (4.25) at $0 \leq S_N \leq T$ for alle $N \in \mathbb{N}$. Afsnitssummerne $S_N$ udgør således en voksende og opadtil begrænset følge af reelle tal, og er dermed konvergent (den konvergerer mod $\sup_{N \in \mathbb{N}} S_N$, se lemma A.3 i appendiks A.1). Dette viser (i). For at vise (ii) benyttes atter (4.25). Da det er antaget at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent vil, $S_N \to \infty$; dermed vil også $T_N \to \infty$ for $N \to \infty$. Vi slutter, at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er divergent. □

Vi bemærker, at sammenligningskriteriet også kan anvendes hvis blot ulighederne $0 \leq a_n \leq b_n$ er opfyldt "fra et vist trin", dvs. for $n \geq K$ for et vist $K \in \mathbb{N}$. Det følgende eksempel illustrerer dette.

**Eksempel 4.21** Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvor

$$a_n = \begin{cases} n^4 & \text{for } n = 1, \ldots, 1000, \\ \frac{2}{2^n+1} & \text{for } n = 1001, \ldots. \end{cases}$$

De første 1000 led i rækken spiller ingen rolle for rækkens konvergensforhold. Derfor betragter vi kun $a_n$ for $n > 1000$; for disse værdier af $n$ er

$$0 \leq a_n = \frac{2}{2^n + 1} \leq \frac{2}{2^n}.$$

Da rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

er konvergent ifølge eksempel 4.18, er også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$ konvergent. Via sammenligningskriteriet kan vi nu slutte, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ også er konvergent. □

**Eksempel 4.22** Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots.$$

Først bemærkes at da $(n+1)^2 = (n+1)(n+1) \geq (n+1)n$ er

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)n}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Fra eksempel 4.18(iii) vides at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$ er konvergent, så sammenligningskriteriet viser at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ også er konvergent. Dette harmonerer med et resultat vi vil vise i eksempel 6.26 – med et meget anderledes argument, der endda tillader os at bestemme summen. □

For spørgsmålet om hvorvidt en given række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent eller ej spiller de første led i rækken ingen rolle: det handler udelukkende om hvorvidt $a_n$ konvergerer "tilstrækkelig hurtigt" mod 0 for $n \to \infty$. Det viser sig, at hvis to rækker "opfører sig ens" for store værdier af $n$, så er begge konvergente eller begge divergente. For at kunne formulere dette præcist har vi brug for en definition:

**Definition 4.23 (Ækvivalente rækker)** *To rækker*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*med positive led er ækvivalente hvis der findes en konstant $C > 0$ således at*

$$\frac{a_n}{b_n} \to C \textit{ for } n \to \infty. \tag{4.26}$$

**Sætning 4.24 (Ækvivalentskriteriet)** *Antag at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ har positive led og er ækvivalente. Så er begge rækker konvergente, eller begge rækker er divergente.*

**Bevis:** Betingelsen (4.26) implicerer at

$$\frac{1}{C}\frac{a_n}{b_n} \to 1 \text{ for } n \to \infty.$$

Vi kan derfor finde et $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{C}\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2} \text{ for alle } n \geq N,$$

dvs. så

$$\frac{C}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3C}{2} b_n \text{ for alle } n \geq N.$$

Sammenligningskriteriet viser nu, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent; og hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. □

**Eksempel 4.25** Vi giver nu et alternativt argument for resultatet i eksempel 4.22. Sæt

$$a_n = \frac{1}{(n+1)n}, \quad b_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Så ses at

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)n}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1 \text{ for } n \to \infty.$$

Derfor er rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

ækvivalente. Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også konvergent ifølge sætning 4.24. □

Definitionen af konvergens for en uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ afhænger af rækkefølgen af tallene $a_n$: forskellige rækkefølger vil lede til forskellige afsnitssummer, og (muligvis) forskellige svar på spørgsmålet om konvergens. Der eksisterer rækker for hvilke nogle ordninger af leddene fører til konvergente rækker og andre til divergente rækker (et konkret eksempel optræder i opgave 108). Den følgende definition introducerer en betingelse, der sikrer at en række er konvergent uanset hvordan leddene ordnes.

**Definition 4.26 (Absolut konvergens)** *En uendelig række* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *siges at være absolut konvergent hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *er konvergent.*

Den følgende sætning, der bevises i appendiks A.7, relaterer begreberne konvergens og absolut konvergens af uendelige rækker.

**Sætning 4.27** *Hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er absolut konvergent, så er* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent; endvidere er*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{4.27}$$

Man kan vise, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så leder enhver omordning af leddene til en konvergent række med den samme sum.

Der findes rækker, som er konvergente, men ikke absolut konvergente: sådanne rækker siges at være *betinget konvergente.*

**Definition 4.28 (Betinget konvergens)** *En uendelig række* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *siges at være betinget konvergent hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er konvergent og* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *er divergent.*

I eksempel 4.39 studeres en række som er konvergent, men ikke absolut konvergent.

**Eksempel 4.29** Vi vil undersøge om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} \tag{4.28}$$

er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent.

Intuitivt er det fornuftigt at forvente at rækken er absolut konvergent: vi ved jo fra eksempel 4.18 at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ er konvergent, og faktoren $\sin n$ i tælleren i (4.28) bevæger sig i det begrænsede interval $[-1, 1]$. For at vise at intuitionen er korrekt sætter vi

$$a_n = \frac{\sin n}{2^n};$$

så er

$$0 \leq |a_n| = \left| \frac{\sin n}{2^n} \right| = \frac{|\sin n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left( \frac{1}{2} \right)^n .$$

Vi bruger nu sammenligningskriteriet: da $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ er konvergent ifølge eksempel 4.18 kan vi slutte at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent. Konklusionen er altså at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} \quad \text{er absolut konvergent.}$$ □

En tilstrækkelig betingelse for (absolut) konvergens af en uendelig række er givet i *kvotientkriteriet*:

**Sætning 4.30 (Kvotientkriteriet)** *Antag at $a_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og at der findes et tal $C \geq 0$ således at*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \to C \quad \textit{for} \quad n \to \infty. \tag{4.29}$$

*Så gælder følgende*

*(i) Hvis $C < 1$, så er $\sum a_n$ absolut konvergent.*

*(ii) Hvis $C > 1$, så er $\sum a_n$ divergent.*

Vi beviser sætning 4.30 i appendiks A.7. Bemærk, at tilfældet $C = 1$ har en speciel status: sætning 4.30 giver ikke nogen konklusion i dette tilfælde. Der findes både konvergente og divergente rækker som leder til $C = 1$; hvis kvotientkriteriet leder til denne værdi må man altså benytte andre metoder for at afgøre konvergensspørgsmålet.

**Eksempel 4.31** Lad $\alpha > 0$ være givet, og betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots .$$

Sæt

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha};$$

så ses at

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha .$$

Ved division med $n$ i brøkens tæller og nævner fås nu

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^\alpha \to 1 \text{ for } n \to \infty.$$

Kvotientkriteriet kan altså ikke fortælle os om rækken er konvergent eller divergent. Vi vender tilbage til rækken i eksempel 4.34. □

**Eksempel 4.32** Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} + \cdots + \frac{n^2}{2^n} + \cdots .$$

Sæt

$$a_n = \frac{n^2}{2^n};$$

så ses at

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{2} \\ &\to \frac{1}{2} \quad \text{for } n \to \infty.\end{aligned}$$

Via kvotientkriteriet sluttes at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ er konvergent. □

Bemærk, at Maplekompendiet i afsnit D.4.1 viser hvorledes Maple kan bruges i forbindelse med kvotientkriteriet.

## 4.6 Vurdering af summen af en uendelig række

Vi har allerede set adskillige kriterier, der kan bruges til at afgøre om en forelagt række er konvergent. De fleste af disse kriterier tager kun stilling til selve konvergensspørgsmålet: f.eks. kan vi ofte bruge kvotientkriteriet eller sammenligningskriteriet til at vise at en given række er konvergent, men vi får ikke noget at vide om dens sum.

For uendelige rækker gælder generelt at det er svært eller umuligt at bestemme den eksakte sum. Dette leder til spørgsmålet om hvordan man kan finde tilnærmede værdier for summen. Her er det naturligt at benytte afsnitssummen $S_N$: den kan jo normalt hurtigt bestemmes ved hjælp af en computer, og vi ved at $S_N$ er tæt på den korrekte sum når blot $N$ er tilstrækkelig stor. Det eneste problem er at vi skal vide *hvor stor* $N$ skal vælges! Med andre ord har vi brug for redskaber til at vurdere forskellen

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_N\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| \\ &= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right|.\end{aligned}$$

En metode hertil kan afledes fra det såkaldte *integralkriterium.* Ideen heri er, for den givne række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ at betragte en funktion $f$ for hvilken $f(n) = a_n$ for $n \in \mathbb{N}$; herved kan man skrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Under visse antagelser kan konvergensforholdende for den givne række afgøres ud fra egenskaberne for funktionen $f$:

**Sætning 4.33 (Integralkriteriet)** *Antag at funktionen*

$$f : [1, \infty[ \to [0, \infty[$$

*er kontinuert og aftagende. Så gælder følgende:*

*(i) Hvis det uegentlige integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent, og*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1). \tag{4.30}$$

*(ii) Hvis det uegentlige integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er divergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergent.*

Husk at det uegentlige integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent hvis $\int_1^{t} f(x)\,dx$ har en endelig grænseværdi for $t \to \infty$; hvis der ikke eksisterer en grænseværdi er integralet divergent. Sætning 4.33 bevises i appendiks A.7.

I det følgende eksempel bruges integralkriteriet til at undersøge konvergensforholdende for en vigtig klasse af rækker:

**Eksempel 4.34** Lad $\alpha > 0$, og betragt atter rækken i eksempel 4.31,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \cdots.$$

Ved undersøgelse af denne række ved brug af integralkriteriet sætter vi

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in [1, \infty[.$$

Denne funktion er aftagende og kontinuert. For $\alpha > 1$ er

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^t x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{-\alpha+1}\left[x^{-\alpha+1}\right]_1^t = \frac{1}{-\alpha+1}(t^{-\alpha+1} - 1).$$

Det følger at

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx \to \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{for } t \to \infty.$$

Det uegentlige integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ er altså konvergent, og

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Via sætning 4.33 konkluderes at

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \text{ er konvergent hvis } \alpha > 1.$$

Endvidere viser (4.30) at

$$\frac{1}{\alpha-1} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \le \frac{1}{\alpha-1} + 1 \tag{4.31}$$

Vi undersøger nu tilfældet $\alpha = 1$: her fås at

$$\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^t = \ln t \to \infty \quad \text{for } t \to \infty.$$

Det uegentlige integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

er således divergent. Via sætning 4.33 sluttes at

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \text{ er divergent.}$$

Med et tilsvarende argument (der overlades til læseren) kan man vise, at den givne række er divergent når $\alpha < 1$. Alternativt kan dette tilfælde klares ved hjælp af sammenligningskriteriet og brug af vores viden om tilfældet $\alpha = 1$ (gør det!). □

Ulighederne i (4.30) giver information om størrelsen af summen $\sum_{n=1}^\infty f(n)$: summen vil ligge i intervallet

$$\left[\int_1^\infty f(x)\,dx, \int_1^\infty f(x)\,dx + f(1)\right].$$

Bemærk, at der er tale om et interval med længde givet ved tallet $f(1)$. Hvis tallet $f(1)$ er stort, er der således en betydelig usikkerhed på summens eksakte værdi. For eksempel giver vurderingerne i (4.31) med $\alpha = 2$ at

$$1 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 2,$$

hvilket ikke er særlig oplysende.

Ved en mindre modifikation af sætning 4.33 kan vi nå frem til en metode, der kan levere en vilkårligt præcis vurdering af den uendelige sum $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Til det formål refererer vi til beviset for sætning 4.33, som findes i appendiks A.7. Ved at checke beviset ses, at det ikke spiller nogen rolle at summen i integralkriteriet starter med $n = 1$: det samme argument virker når vi starter med en vilkårlig værdi af $n$. Én måde at formulere denne observation på er, at hvis betingelserne i sætning 4.33 er opfyldt, så er

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \le \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(N+1) \qquad (4.32)$$

for ethvert $N \in \mathbb{N}$. Dette leder til nogle metoder til approksimativ bestemmelse af summen $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$:

**Korollar 4.35** *Antag at funktionen $f : [1,\infty[ \to [0,\infty[$ er kontinuert og aftagende, ihvertfald for $x \ge N$ for et passende $N \in \mathbb{N}$. Antag endvidere at $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent. Så gælder følgende:*

*(i) For det givne $N$ er*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \le \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(N+1). \qquad (4.33)$$

*(ii) For det givne $N$ er*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} f(n) \quad + \quad & \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \\ \le \quad & \sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(N+1). \qquad (4.34)\end{aligned}$$

**Bevis:** Resultatet i (i) følger direkte af (4.32). For at vise (ii) bemærkes at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{n=1}^{N} f(n).$$

Ved indsættelse i (4.32) ses at

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{n=1}^{N} f(n) \le \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(N+1),$$

hvoraf (4.34) følger ved at addere den endelige sum $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ i ulighederne. □

Vi vil nu forklare hvordan man anvender disse resultater til approksimativ bestemmelse af summen $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Antag at vi ønsker at bestemme denne sum med en fejl der ikke overstiger et givet $\epsilon > 0$. Der er nu følgende muligheder:

**Metode (i):** Vælg $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(N+1) \le \epsilon.$$

Ved brug af (4.33) følger det nu at for den fundne værdi af $N$ er

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) < \epsilon.$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{N} f(n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)$$

kan vi nu slutte at den *endelige sum*

$$\sum_{n=1}^{N} f(n)$$

højst afviger med $\epsilon$ fra summen $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Den endelige sum $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ kan nu beregnes ved hjælp af Maple eller et andet regneprogram.

**Metode (ii):** Vælg $N \in \mathbb{N}$ således at

$$f(N+1) \le \epsilon.$$

Så viser (4.34) at

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + \epsilon;$$

men det betyder jo netop at tallet

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

højst afviger med $\epsilon$ fra summen $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Lad os benytte disse to metoder til at undersøge tilfældet $\alpha = 2$ i eksempel 4.34.

**Eksempel 4.36** Vi ønsker nu at finde summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

med en fejl på højst $\epsilon = 0.01$. Vi benytter først metoden i (i) med $f(x) := \frac{1}{x^2}$. Præcist som i eksempel 4.2 vises (gør det!) at for ethvert $N \in \mathbb{N}$ er

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{N+1}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} \int_{N+1}^{\infty} f(x)\, dx + f(N+1) &= \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx + \frac{1}{(N+1)^2} \\ &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} \\ &= \frac{N+1+1}{(N+1)^2} \\ &= \frac{N+2}{N^2+2N+1} \\ &= \frac{N+2}{N(N+2)+1}. \end{aligned}$$

Idet $N(N+2)+1 \geq N(N+2)$, følger det at

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\, dx + f(N+1) \leq \frac{N+2}{N(N+2)} \leq \frac{1}{N}.$$

Via (4.33) sluttes at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \leq \quad \frac{1}{N}. \tag{4.35}$$

Det ses, at $1/N \leq 0.01$ for $N = 100$; dette viser, at med en fejl på maksimalt 0.01 er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} = 1.635. \tag{4.36}$$

Den endelige sum i (4.36) er beregnet ved hjælp af Maple.

Lad os nu benytte metoden i (ii). For funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ er uligheden $f(N+1) \leq 0.01$ opfyldt for $N = 9$, så med en fejl på maksimalt 0.01 er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{n^2} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{10} = 1.640.$$

I eksempel 6.26 vises at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449. \qquad \square$$

Metoden i (i) giver normalt en væsentligt større værdi for $N$ end (ii). Hvis vi f.eks. i eksempel 4.36 erstatter $\epsilon = 0.01$ med $\epsilon = 10^{-4}$, så leder metoden i (i) til $N = 10^4$ led, mens (ii) leder til $N = 99$. Til gengæld skal man i (ii) også beregne den eksakte værdi af integralet $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx$.

Når det handler om approksimativ bestemmelse af summen $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er metoden i (ii) normalt at foretrække. Men i forbindelse med teorien for Fourierrækker får vi også brug for – for konkrete funktioner $f$ og givne $\epsilon > 0$ – at bestemme $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \epsilon;$$

i denne forbindelse kommer korollar 4.35(i) til at spille en afgørende rolle.

## 4.7 Alternerende rækker

Korollar 4.35 kan kun anvendes på rækker med positive led. Der er en anden vigtig klasse af rækker, hvor vi kan give estimater for hvor godt afsnitssummerne tilnærmer den uendelige sum, nemlig de såkaldte *alternerende rækker.* Herved forstås rækker, hvor leddene skiftevis er positive og negative:

**Definition 4.37 (Alternerende rækker)** *En alternerende række er en uendelig række, der for en passende følge af positive tal $b_n$ kan skrives på formen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots, \qquad (4.37)$$

*eller som*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + \cdots + (-1)^{n} b_n + \cdots \qquad (4.38)$$

Det følgende kriterium, kendt under navnet *Leibniz' kriterium,* er nyttigt til at undersøge om en alternerende række er konvergent. Det kan også bruges til at vurdere hvor mange led man skal medtage i afsnitssummen for at opnå en ønsket approksimation. Sætningen bevises i appendiks A.7.

**Sætning 4.38 (Leibniz' kriterium)** *Betragt en række på formen* (4.37) *eller* (4.38), *og antag følgende:*

*(i) Tallene $b_n$ er positive, dvs. $b_n > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$;*

*(ii) Tallene $b_n$ aftager monotont, dvs.,*

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots.$$

*(iii) Tallene $b_n$ konvergerer mod 0 for $n \to \infty$.*

*Så er rækkerne* (4.37) *og* (4.38) *konvergente. Endvidere gælder for alle $N \in \mathbb{N}$ at*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} b_n \right| \leq b_{N+1} \tag{4.39}$$

*og*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} b_n - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n} b_n \right| \leq b_{N+1}. \tag{4.40}$$

Tallene $b_n$ kan ofte opfattes som funktionsværdier,

$$b_n = f(n),$$

hvor $f$ er en differentiabel funktion. I sådanne tilfælde kan man bruge funktionsundersøgelse til at verificere at funktionen $f$, og dermed talfølgen $b_n$, er aftagende; se Maplekompendiet afsnit D.4.4.

Vi bemærker at man kan opskrive resultater svarende til sætning 4.38 for alternerende rækker der ikke nødvendigvis starter med $n = 1$. For en alternerende række på formen $\sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ fås således vurderingen

$$\left| \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n - \sum_{n=p}^{N} (-1)^{n-1} b_n \right| \leq b_{N+1} \tag{4.41}$$

når blot $N \geq p$.

**Eksempel 4.39** Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{4.42}$$

er konvergent; dette følger af sætning 4.38 anvendt på talfølgen $b_n = 1/n$. Bemærk at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

er divergent ifølge eksempel 4.34; rækken (4.42) er således betinget konvergent, men ikke absolut konvergent. □

**Eksempel 4.40** Betragt rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{1+\ln n} = -\frac{1}{1+\ln 2}+\frac{1}{1+\ln 3}-\frac{1}{1+\ln 4}+\cdots . \tag{4.43}$$

Vi bemærker at funktionen ln er voksende; derfor er talfølgen

$$b_n = \frac{1}{1+\ln n}$$

aftagende. Det ses også at

$$b_n \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Derfor er den givne række konvergent ifølge sætning 4.38. Hvis vi ønsker at bestemme summen med en fejl på højst $\epsilon = 0.2$, vælger vi $N \in \mathbb{N}$ således at $b_{N+1} \leq 0.2$, altså så

$$\frac{1}{1+\ln(N+1)} \leq 0.2.$$

Vi kan omforme denne ulighed til

$$\frac{1}{0.2} \leq 1+\ln(N+1),$$

eller

$$4 \leq \ln(N+1).$$

Denne ulighed er opfyldt når $N+1 \geq e^4$, altså når $N \geq e^4 - 1 \approx 53.6$. Ifølge (4.39) gælder derfor med en fejl på højst $\epsilon = 0.2$ at

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{1+\ln n} \approx \sum_{n=2}^{54}(-1)^{n-1}\frac{1}{1+\ln n} = -0.43. \tag{4.44}$$

Den endelige sum i (4.44) er beregnet ved hjælp af Maple.

Vi bemærker at rækken (4.43) konvergerer meget langsomt: hvis man ønsker at beregne summen med en fejl på højst $\epsilon = 0.05$ angiver Leibniz' kriterium at man skal bruge $N \geq e^{19} - 1 \approx 1.78 \cdot 10^8$ led! □

# Kapitel 5

## Uendelige rækker med variable led

Vi har indtil nu diskuteret uendelige rækker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvor leddene $a_n$ er tal. Det næste skridt er at betragte rækker, hvor leddene afhænger af en variabel. Vi analyserer sådanne tilfælde med stigende kompleksitet. I afsnit 5.1 betragtes kvotientrækker, det vil sige rækker af typen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \; x \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Vi bestemmer de $x \in \mathbb{R}$ for hvilke rækken er konvergent, og den tilhørende sum. I afsnit 5.2 betragtes "tilsvarende" rækker, hvor vi nu tillader leddene i (5.1) at blive multiplicerede med konstanter (der afhænger af $n$), dvs. rækker på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

for passende konstanter $c_n$; rækker af denne type kaldes *potensrækker.* Afsnit 5.3 går et vigtigt skridt videre: her betragtes uendelige rækker af generelle funktioner $f_0, f_1, \ldots$, altså rækker på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots.$$

En forståelse af sådanne rækker vil vise sig at være vigtig for behandlingen af Fourierrækker i kapitel 6. Afsnit 5.4 introducerer begrebet uniform konvergens (også kaldet ligelig konvergens), og redegør for betydningen heraf.

## 5.1 Kvotientrækker

Et af de simpleste eksempler på en række med variable led er den såkaldte *kvotientrække;* undertiden bruges også ordet *den geometriske række.*

**Definition 5.1 (Kvotientrække)** *En Kvotientrække er en række på formen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots , \tag{5.2}$$

*hvor $x \in \mathbb{R}$ (eller $x \in \mathbb{C}$). Tallet $x$ kaldes kvotienten.*

Vi viser nu at en kvotientrække er konvergent hvis og kun hvis $|x| < 1$:

**Sætning 5.2 (Kvotientrække)** *En kvotientrække $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ er konvergent hvis og kun hvis $|x| < 1$. For $|x| < 1$ er summen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \tag{5.3}$$

**Bevis:** Vi finder først de værdier af $x$ for hvilke rækken er konvergent. Til dette formål bemærkes at for ethvert $N \in \mathbb{N}$ er

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^N) &= (1-x)\cdot 1 + (1-x)x + \cdots (1-x)x^N \\ &= 1 - x + x - x^2 + \cdots + x^N - x^{N+1} \\ &= 1 - x^{N+1}.\end{aligned}$$

Det følger heraf, at den $N$'te afsnitssum for $x \neq 1$ er givet ved

$$S_N = 1 + x + \cdots + x^N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}. \tag{5.4}$$

Når $|x| < 1$ vil $x^{N+1} \to 0$ for $N \to \infty$; derfor vil

$$S_N \to \frac{1}{1-x} \quad \text{for } N \to \infty.$$

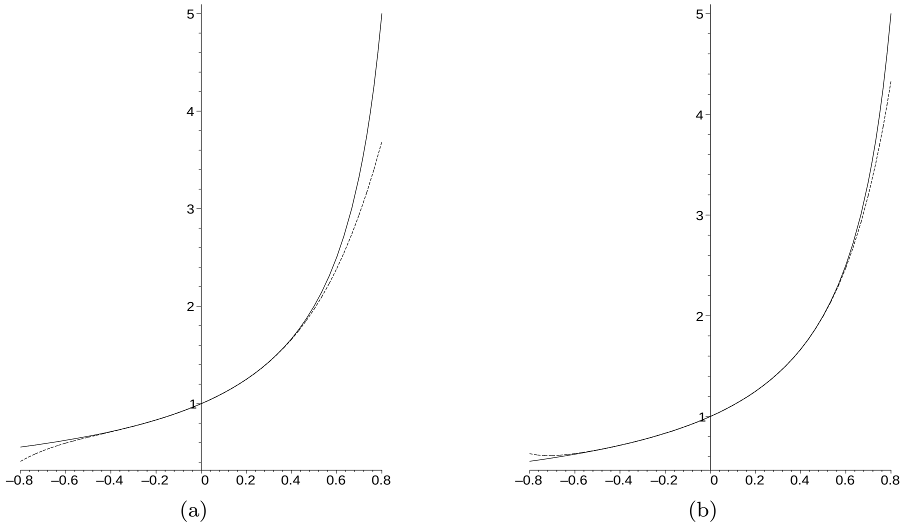
Det ses også at $S_N$ ikke er konvergent når $|x| \geq 1$ (heller ikke i tilfældet $x = 1$, som var udelukket i det ovenstående argument). □

**Eksempel 5.3** Vi betragter eksempel 4.18(ii) igen. Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

er en kvotientrække med kvotient $x = \frac{1}{2}$; ifølge sætning 5.2 er rækken altså konvergent, og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$$ □




**Figur 5.4** *(a) viser funktionen* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *og afsnitssummen* $S_5(x) = \sum_{n=0}^{5} x^n$ *af rækkefremstillingen i* (5.3) *(stiplet). (b) viser funktionen* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *og afsnitssummen* $S_8(x) = \sum_{n=0}^{8} x^n$ *(stiplet).*

Bemærk at vi i eksempel 5.3 fandt summen af en kvotientrække startende med $n = 1$, simpelthen ved at subtrahere det første led i (5.3). Alternativt kunne vi have brugt følgende konsekvens af sætning 5.2:

**Korollar 5.5** *For* $|x| < 1$ *og* $N \in \mathbb{N}$ *er*

$$\sum_{n=N}^{\infty} x^n = \frac{x^N}{1-x}. \tag{5.5}$$

**Bevis:** For $|x| < 1$ og $N \in \mathbb{N}$ følger det ved et skift i summationsindeks (se lemma 4.16) at

$$\sum_{n=N}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+N} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n x^N.$$

Leddet $x^N$ afhænger ikke af summationsindexet $n$, og kan derfor trækkes ud. Herved ses at

$$\sum_{n=N}^{\infty} x^n = x^N \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^N}{1-x},$$

hvor vi til sidst benyttede sætning 5.2. □

**Eksempel 5.6** Ved brug af (5.5) ses, at

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{3^{n+1}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{3 \cdot 3^n} = \frac{5}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{5}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{3} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{54}. \quad \square$$

Af grunde, som vil blive belyst i afsnit 5.4, nævnes, at (5.3) skal opfattes *punktvist:* udtrykket siger, at hvis vi betragter et fast $x \in ]-1,1[$, så vil rækken i (5.3) konvergere mod den angivne grænseværdi. Dette implicerer *ikke*, at man kan finde en afsnitssum $S_N$ af (5.2) som er tæt på $\frac{1}{1-x}$ simultant *for alle* $x \in ]-1,1[$; man siger, at der ikke er tale om *uniform konvergens.* Se figur 5.4. Begrebet uniform konvergens diskuteres nærmere i afsnit 5.4.

## 5.2 Potensrækker

Et af formålene med at betragte uendelige summer af funktioner er at få et redskab til at splitte "komplicerede funktioner"op som superpositioner af "simple funktioner." Vi vil betragte forskellige typer "simple funktioner": i dette afsnit vil der være tale om polynomier, og i forbindelse med Fourierrækker er der tale om velkendte trigonometriske funktioner. I begge tilfælde leder metoderne frem til effektive metoder til løsning af differentialligninger.

Vi starter med at forbinde uendelige rækker med teorien for approksimation via Taylor polynomier, som blev diskuteret i afsnit 4.3. Først bemærkes at sætning 4.13 kan omformuleres via uendelige rækker:

**Sætning 5.7** *Lad $I$ være et interval og $f : I \to \mathbb{R}$ en uendelig ofte differentiabel funktion. Lad $x_0 \in I$, og antag at der findes en konstant $C > 0$ således at*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{og alle } x \in I.$$

*Så kan funktionen $f$ fremstilles via en uendelig række,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{for alle } x \in I. \tag{5.6}$$

**Bevis:** Sætning 4.13 viser at der for ethvert $x \in I$ gælder at

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \leq \frac{C}{(N+1)!} \left|x - x_0\right|^{N+1}. \tag{5.7}$$

Uanset det valgte $x \in I$ vil (overvej dette!)

$$\frac{|x-x_0|^{N+1}}{(N+1)!} \to 0 \text{ for } N \to \infty.$$

Derfor følger det af (5.7) at

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \to f(x) \text{ for } N \to \infty.$$

Det ønskede resultat følger nu direkte af definitionen på konvergens af en uendelig række. □

I resten af dette afsnit vil vi antage at $0 \in I$ og vælge udviklingspunktet $x_0 = 0$.

**Eksempel 5.8** Lad os atter betragte eksponentialfunktionen, dog i første omgang på et begrænset interval:

$$f(x) = e^x, \; x \in ]-1, 2[.$$

Da

$$f'(x) = f''(x) = f^{(n)}(x) = e^x, \; n \in \mathbb{N},$$

ses at

$$|f^{(n)}(x)| \leq e^2 \text{ for alle } n \in \mathbb{N}, \; x \in ]-1, 2[. \tag{5.8}$$

Sætning 5.7 viser nu at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \; x \in ]-1, 2[. \tag{5.9}$$

Det specielle interval $]-1, 2[$ spiller ikke nogen rolle i (5.9): argumentet der leder til (5.9) kan anvendes på et vilkårligt begrænset interval der indeholder 0. Identiteten (5.9) gælder altså for ethvert $x \in \mathbb{R}$. Ved at bruge at $f^{(n)}(0) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, kan vi nu slutte at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Formel (5.10) viser at beregning af $e^x$ kan reduceres til gentagen brug af operationerne addition, multiplikation, og division. Alle beregningsprogrammer (lommeregnere, Maple, Mathematica, Matlab, etc.) er baseret på disse operationer, og alle andre operationer udføres basalt set ved reduktion til disse operationer. Faktisk beregner disse regneprogrammer udtryk involverende $e^x$ ved brug af rækkefremstillinger af typen (5.10)! I praksis kan et program dog ikke addere uendeligt mange tal, så i stedet beregnes

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \approx e^x$$

for en tilstrækkelig stor værdi af $N$; se eksempel 4.14, hvor vi så at $N = 8$ er tilstrækkelig til at approksimere $e^x$ på intervallet $[-1, 2]$ med en fejl på højst 0.015. De matematiske beregningsprogrammer anvender

væsentligt flere led, og fejlen er mange størrelsesordener mindre; under normale omstændigheder er den så lille at den ikke bemærkes, men ved lange udregninger vil afrundingerne undertiden summere op og blive synlige. □

**Eksempel 5.9** Betragt funktionen $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$. Vi ser at

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f''''(x) = \sin x.$$

Efter at have differentieret fire gange, er vi altså tilbage ved sinusfunktionen igen. Dette kan formuleres ved at der for $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$\begin{cases} f'(x) & = \cos x = f^{(1+4n)}(x),\ n \in \mathbb{N}, \\ f''(x) & = -\sin x = f^{(2+4n)}(x),\ n \in \mathbb{N}, \\ f^{(3)}(x) & = -\cos x = f^{(3+4n)}(x),\ n \in \mathbb{N}, \\ f^{(4)}(x) & = \sin x = f^{(4n)}(x),\ n \in \mathbb{N}, . \end{cases}$$

Altså er $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \in \mathbb{R}$. Ved at indsætte $x_0 = 0$ ses at

$$\begin{cases} f'(0) & = f^{(1+4n)}(0) = 1,\ n \in \mathbb{N}, \\ f''(0) & = f^{(2+4n)}(0) = 0,\ n \in \mathbb{N}, \\ f^{(3)}(0) & = f^{(3+4n)}(0) = -1,\ n \in \mathbb{N}, \\ f^{(4)}(0) & = f^{(4n)}(0) = 0,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Via sætning 5.7 følger det nu at

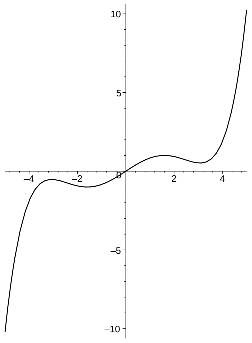
$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \end{aligned}$$

Vi kan skrive dette som en uendelig række:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{5.11}$$

Afsnitssummerne af rækken i (5.11) konvergerer meget hurtigt mod sinusfunktionen, primært på grund af nævneren $(2n+1)!$ i (5.11), som får koefficienterne i rækken til at gå hurtigt mod 0. En anden grund til den hurtige konvergens er fortegnsskiftene i afsnitssummerne: potensrækken (5.11) er en alternerende række, så ifølge sætning 4.38 er

$$\left| \sin x - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)!}. \tag{5.12}$$




**Figur 5.11** *Afsnitssummen* $S_5(x)$ *for funktionen* $f(x) = \sin x$*, se eksempel 5.9.*

Hvis vi ønsker at forskellen i (5.12) er mindre end 0.01 for alle $x \in [-5, 5]$ er det nok at vælge $N \geq 7$. For $N = 7$ er den tilhørende afsnitssum et polynomium af grad 15.

Det er overraskende at rækkefremstillingen (5.11) for sinusfunktionen er gyldig for alle $x \in \mathbb{R}$. Ingen af funktionerne i rækkefremstillingen er periodiske, men ikke desto mindre er den uendelige sum, altså sinusfunktionen, periodisk med periode $2\pi$! Se figur 5.11, som viser afsnitssummen

$$S_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

som helt oplagt ikke er periodisk. Dette viser, at uendelige rækker kan snyde vores intuition; vi vil se flere eksempler på dette senere. □

Lad os samle de resultater vi har vist i en sætning:

**Sætning 5.10 (Rækkefremstillinger for** $e^x, \cos x, \sin x$**)** *For ethvert* $x \in \mathbb{R}$ *gælder følgende rækkefremstillinger:*

*(i)* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

*(ii)* $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

*(iii)* $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

Beviset for (iii) er helt parallelt til (ii).

Kvotientrækkerne, samt fremstillingerne for ekponentialfunktionen og sinus og cosinus i sætning 5.10, har alle formen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for passende koefficienter $c_n$. Vi vil nu introducere rækker af denne form generelt.

**Definition 5.12 (Potensrække)** *En række på formen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{5.13}$$

*kaldes en potensrække. En funktion $f : I \to \mathbb{R}$, der kan skrives på formen*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

*for passende koefficienter $c_n$, siges at have en potensrækkefremstilling.*

Appendiks B.1 indeholder en liste over standardfunktioner, der kan fremstilles ved hjælp af en potensrække. Desværre er det langt fra alle funktioner der kan repræsenteres ved hjælp af potensrækker; vi vender tilbage til dette emne på side 118.

Potensrækker optræder i mange sammenhænge hvor man skal approksimere komplicerede funktioner. De optræder også i forbindelse med bestemmelse af en partikulær løsning til en inhomogen differentialligning, se afsnit 7.1.

Vedrørerende konvergens af potensrækker gælder et meget vigtigt resultat: basalt set siger det, at der for enhver potensrække findes et interval således at rækken er konvergent for $x$-værdier inde i intervallet og divergent for $x$-værdier udenfor intervallet:

**Sætning 5.13** *For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ gælder ét af følgende:*

*(i) Rækken er kun konvergent for $x = 0$.*

*(ii) Rækken er absolut konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$.*

*(iii) Der findes et tal $\rho > 0$ således at rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.*

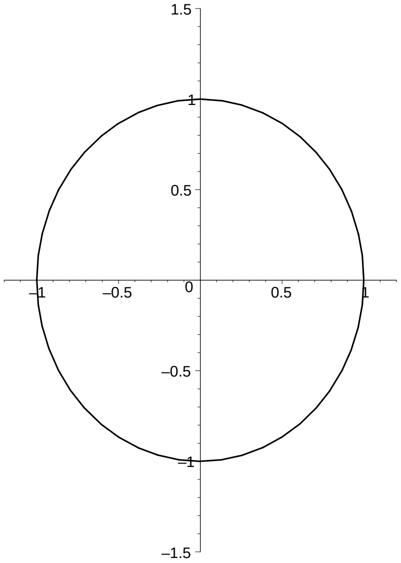
Under en ekstra antagelse giver vi et bevis for sætning 5.13 i appendiks A.8. Hvis tilfældet (iii) i sætning 5.13 optræder, kaldes tallet $\rho$ for rækkens *konvergensradius.* I tilfældet (i) sættes $\rho = 0$, og i (ii) sættes $\rho = \infty$. Sætning 5.13 gælder også for komplekse værdier af $x$, hvilket forklarer ordet "konvergensradius": se figur 5.15, som svarer til tilfældet $\rho = 1$.

**Eksempel 5.14** Lad os finde konvergensradius for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{5.14}$$

Rækken (5.14) er oplagt konvergent for $x = 0$. Betragt nu et vilkårligt $x \neq 0$; med

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$




**Figur 5.15** *Konvergenscirklen for potensrækken* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{2n}$ *i eksempel 5.16, som har konvergensradius* $\rho = 1$. *Rækken er konvergent for* $x$*-værdier på den del af den reelle akse der er indenfor cirklen, og divergent udenfor cirklen. Hvis vi tænker på* $x$ *som en kompleks variabel og planen* $\mathbb{R}^2$ *som* $\mathbb{C}$, *er rækken konvergent for alle* $x$ *indenfor cirklen, og divergent udenfor.*

ses at

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{x^n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\,\frac{n!}{(n+1)!}\right| = |x|\,\frac{n!}{(n+1)!}. \tag{5.15}$$

Vi vil ofte skulle manipulere med led indeholdende fakultetsfunktionen, så lad os gøre det omhyggeligt. Idet

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

og

$$(n+1)! = (n+1)n(n-1)(n-2)\cdots 1 = (n+1)n!$$

er

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}.$$

Ved indsættelse i (5.15) følger det at

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\,\frac{n!}{(n+1)!} = |x|\,\frac{1}{n+1} \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Kvotientkriteriet viser at rækken i (5.14) er konvergent for alle $x$, så $\rho = \infty$. Dette er i overensstemmelse med vores observation i eksempel (5.8), hvor vi så at (5.10) gælder for alle $x \in \mathbb{R}$. □

**Eksempel 5.16** Betragt potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{2n} = -x^2 + 2x^4 - 3x^6 + \cdots .$$

Rækken (5.14) er oplagt konvergent for $x = 0$. Betragt nu et vilkårligt $x \neq 0$; sættes $a_n = (-1)^n n x^{2n}$ fås at

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)x^{2(n+1)}}{(-1)^n n x^{2n}}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\,\frac{n+1}{n}\,\frac{x^{2(n+1)}}{x^{2n}}\right| \\
&= \frac{n+1}{n}x^2 \\
&\to x^2 \text{ for } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Vi slutter igen via kvotientkriteriet at rækken er konvergent for $|x| < 1$ og divergent for $|x| > 1$; rækkens konvergensradius er altså $\rho = 1$. □

I intervallet $]-\rho, \rho[$ viser det sig, at en potensrække definerer en uendelig ofte differentiabel funktion. Vi viser den følgende sætning i appendiks A.8; dog skal det nævnes, at beviset bruger nogle resultater angående generelle uendelige rækker, som vi ikke har præsenteret endnu.

**Sætning 5.17 (Differentiation af potensrække)** *Antag at potensrækken* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *har konvergensradius* $\rho > 0$, *og definér funktionen* $f$ *ved*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \;\; x \in ]-\rho, \rho[. \tag{5.16}$$

*Så er* $f$ *uendelig ofte differentiabel. Endvidere er*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \;\; x \in ]-\rho, \rho[; \tag{5.17}$$

*mere generelt gælder for ethvert* $k \in \mathbb{N}$ *at*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \;\; x \in ]-\rho, \rho[. \tag{5.18}$$

Bemærk de ændringer i summationsindexet som optræder i sætning 5.17. De forklares nærmere i det følgende eksempel.

**Eksempel 5.18** Når vi skriver leddene i rækken (5.16) ud fås

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots .$$

Her er det første led (som jo svarer til indexet $n = 0$) konstant og det giver derfor ikke noget bidrag til $f'(x)$. Derfor starter summen i (5.17) med $n = 1$ i stedet for $n = 0$. Tilsvarende skal sumudtrykket for den $k$'te afledede $f^{(k)}(x)$ starte med $n = k$, se (5.18).

Man skal *altid* være meget omhyggelig ved anvendelse af denne differentiationsregel: man skal nemlig kun ændre summationsindexet når det første led i rækken er en konstant. Betragt for eksempel rækken

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots , \ x \in ]-1, 1[;$$

her er rækkens første led jo $x$, som giver bidraget 1 til den afledede. Altså er

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots , \ x \in ]-1, 1[.$$

I dette tilfælde skal indexet altså ikke ændres.

I praksis afgøres det lettest om indexet skal ændres eller ej ved at skrive de første led i rækken op. □

**Eksempel 5.19**

(i) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}$ har konvergensradius $\rho = 1$. Altså er funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}, \ x \in ]-1, 1[$$

differentiabel, og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(n+1)x^{2n-1}, \ x \in ]-1, 1[.$$

(ii) Rækken $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x)^n$ har konvergensradius $\rho = 1/2$. Altså er funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n x^n, \ x \in ]-1/2, 1/2[$$

differentiabel, og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)2^n x^{n-1}, \ x \in ]-1/2, 1/2[.$$ □

Sætning 5.17 giver en *nødvendig* betingelse for at en funktion kan have en potensrækkefremstilling: den skal ihvertfald være uendelig ofte differentiabel. I eksempel 5.23 viser vi at denne betingelse ikke er tilstrækkelig. Før vi når så vidt viser vi et resultat, der forbinder sætning 5.17 med Taylors sætning.

**Sætning 5.20** *Betragt en potensrække* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *med konvergensradius* $\rho > 0$*, og lad*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \;\; x \in ]-\rho, \rho[.$$

*Så er*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \;\; n = 0, 1, \ldots, \tag{5.19}$$

*dvs.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \;\; x \in ]-\rho, \rho[.$$

**Bevis:** Bemærk først at $f(0) = c_0$. Ved at sætte $x = 0$ i sætning 5.17 følger det at

$$f'(0) = c_1, \;\; f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot c_2,$$

og mere generelt, via (5.18),

$$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

□

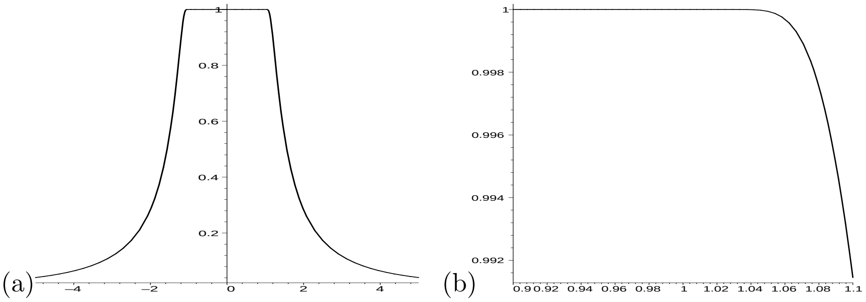
Sætning 5.20 viser at hvis en funktion $f$ har en potensrækkefremstilling med koefficienter $c_n$, så er der *nødvendigvis* tale om den fremstilling vi så i sætning 5.7. Specielt viser dette, at potensrækkefremstillingen er *éntydig*, altså at kun ét valg af koefficienterne $c_n$ er muligt. Sætning 5.20 har en vigtig konsekvens, kaldet *identitetssætningen for potensrækker,* der spiller en afgørende rolle i forbindelse med løsning af differentialligninger:

**Korollar 5.21 (Identitetssætningen for potensrækker)** *Hvis koefficienterne* $c_n$ *for et passende* $\rho > 0$ *opfylder at*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0, \;\; x \in ]-\rho, \rho[,$$

*så er* $c_n = 0$ *for alle* $n$*.*

Som lovet vil vi nu vise at der findes uendelig ofte differentiable funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som ikke har potensrækkefremstillinger.




**Figur 5.22** *(a): Funktionen i* (5.21)*, vist på intervallet* $[-5,5]$*. (b): Funktionen i* (5.21)*, vist på intervallet* $[0.9,1.1]$*. Læg mærke til enhederne på andenaksen!*

**Eksempel 5.23** Betragt en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ med følgende egenskaber:

(i) $f(x)=1$ for alle $x\in[-1,1]$.

(ii) $f$ er uendelig ofte differentiabel.

Antag nu, at $f$ har en potensrækkefremstilling,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ for alle } x\in\mathbb{R}. \tag{5.20}$$

Sætning 5.20 viser, at så er

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases}1 \text{ hvis } n=0,\\ 0 \text{ ellers.}\end{cases}$$

Ved indsættelse af disse koefficienter i (5.20) ses at dermed er

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Det følger heraf, at medmindre $f$ er konstant, så kan $f$ ikke have en potensrækkefremstilling der er gyldig for alle $x\in\mathbb{R}$. Det eneste der nu mangler er at finde en konkret ikke-konstant funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, som tilfredsstiller (i) og (ii). Ét valg for en sådan funktion er

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ for } |x|\le 1,\\ 1-e^{\frac{-1}{x^2-1}} \text{ for } |x|>1.\end{cases} \tag{5.21}$$

Denne funktion er vist på figur 5.22(a). Ved et første øjekast ser det ikke ud til at funktionen er differentiabel for $x=1$ – men det er den! Se figur 5.22(b), hvor der er zoomet ind på et lille interval omkring $x=1$. Et matematisk argument for at funktionen er uendelig ofte differentiabel er vanskeligt, og vil ikke blive givet her. □

Resultatet i eksempel 5.23 kan formuleres på en anden måde. For den betragtede funktion $f$ er Taylorrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$; men summen er *ikke* identisk med $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Vi bemærker at man præcis ved hvilke funktioner der kan fremstilles via potensrækker: det er de såkaldte *analytiske funktioner* (også kaldet *holomorfe funktioner*), altså funktioner der er komplekst differentiable. Flere detaljer om dette kan findes i enhver lærebog om kompleks funktionsteori, se f.eks. [4] eller [12].

## 5.3 Generelle uendelige rækker af funktioner

Potensrækker består, som vi har set, af uendelige summer af led af formen $c_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Eftersom ikke alle funktioner har en fremstilling af denne type, er det naturligt også at betragte uendelige summer af andre typer "simple" funktioner. I dette afsnit vil vi helt generelt betragte en vilkårlig samling af funktioner $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ med den *samme* definitionsmængde $I$; hertil ønsker vi at knytte en "sumfunktion" af formen

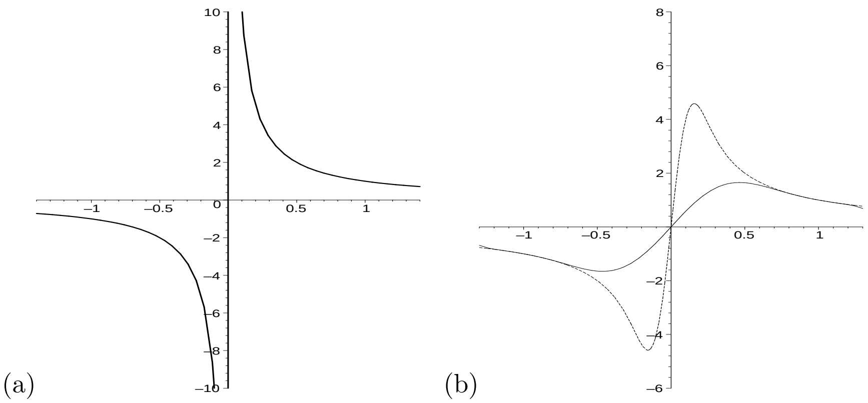
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{5.22}$$

Som første skridt er det vigtigt at være klar over for hvilke værdier af $x$ udtrykket for $f(x)$ giver mening: det er tilfældet for præcis de $x \in I$ for hvilke *rækken af tal* givet ved $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent. Funktionen $f$ kaldes *sumfunktionen* hørende til $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$. Svarende til betegnelsen for uendelige rækker bestående af tal, kaldes

$$S_N(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

for den $N$'te afsnitssum hørende til rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Vi bemærker, at $S_N$ nu er en funktion, der afhænger af $x$.

Vi understreger endnu en gang at omhu er påkrævet ved regning med uendelige summer: mange af de resultater der kendes for endelige summer kan *ikke* umiddelbart overføres til uendelige summer. Som eksempel nævner vi, at enhver endelig sum af kontinuerte funktioner selv er kontinuert. Det næste eksempel viser, at en sum af uendeligt mange kontinuerte funktioner ikke behøver at være kontinuert.




**Figur 5.24** *(a): Funktionen* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n$, $x \in ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. *(b): Afsnitssummerne* $S_5(x) = \sum_{n=0}^{5} x(1-x^2)^n$ *(fuldt optrukket) og* $S_{50}(x) = \sum_{n=0}^{50} x(1-x^2)^n$ *(stiplet). Jo flere led der medtages, jo mere ligner grafen for afsnitssummen grafen for sumfunktionen på figur 5.24. Dog "bøjer alle afsnitssummer af" i nærheden af punktet* $(0,0)$*, som alle graferne går igennem.*

**Eksempel 5.25** Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n.$$

Vi vil finde de $x \in \mathbb{R}$ for hvilken rækken er konvergent, og bestemme den tilhørende sumfunktion.

Først bemærkes, at rækken er konvergent for $x = 0$, med sum 0. For et fast $x \neq 0$ kan vi betragte rækken som en kvotientrække med kvotient $1-x^2$, der er multipliceret med tallet $x$; ifølge sætning 5.2 er rækken derfor konvergent for $|1-x^2| < 1$, dvs. for $0 < |x| < \sqrt{2}$, og divergent for $|x| \geq \sqrt{2}$. Bemærk at for $0 < |x| < \sqrt{2}$ viser sætning 5.2 at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)^n = \frac{1}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x^2}.$$

Derfor er

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)^n = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ for } 0 < |x| < \sqrt{2}, \\ 0 \text{ for } x = 0. \end{cases}$$

Vi ser at sumfunktionen er diskontinuert i $x = 0$ selvom alle funktionerne $x(1-x^2)^n$ er kontinuerte! Figur 5.24(a) viser sumfunktionen; sammenlign med atsnitssummerne $S_5$ og $S_{50}$, som vises på figur 5.24(b). □

Forskellen mellem endelige summer og uendelige summer kan bruges til adskillige overraskende og kontra-intuitive konstruktioner. For eksempel kan man konstruere en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er kontinuert, men ikke differentiabel for noget $x$:

**Eksempel 5.26** Lad $B \in ]0,1[$, og vælg tallet $A$ således at $A \geq 1/B$. Hørende til tallene $A$ og $B$ betragter vi funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B^n \cos(A^n x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Da

$$|B^n \cos(A^n x)| \leq B^n \text{ og } B \in ]0,1[$$

viser sætning 4.20 kombineret med sætning 5.2 at rækken der definerer $f(x)$ er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$. Et resultat fra næste afsnit, sætning 5.33, viser at funktionen $f$ er kontinuert.

Weierstrass viste i 1887 at hvis $A$ er et ulige helt tal, så er funktionen $f$ intetsteds differentiabel. Mere konkret er funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x) \tag{5.23}$$

altså et eksempel på en funktion, der er kontinuert, men ikke differentiabel i noget punkt.

Med klassiske metoder er beviset for ovenstående resultater vanskeligt; med mere moderne redskaber kan det gøres lettere. Se f.eks. [9] for et kort wavelet-baseret bevis. □

## 5.4 Uniform konvergens

Indtil nu har vi udelukkende betragtet konvergens af en uendelig sum af funktioner i *punktvis* forstand: udtrykket i (5.22), altså

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \ x \in I,$$

betyder blot, at for et arbitrært $x \in I$ vil afsnitssummen $S_N(x)$ konvergere mod $f(x)$ for $N \to \infty$. I matematiske termer betyder det, at man for hvert $x \in I$ og ethvert givet $\epsilon > 0$ kan finde et $N_0 \in \mathbb{N}$ således at

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| \leq \epsilon \tag{5.24}$$

for alle $N \geq N_0$.

Vi vil nu forklare at dette konvergensbegreb ikke altid er tilstrækkeligt. Vi har allerede nævnt at motivationen bag (5.22) er at fremstille en kompliceret funktion $f$ som en uendelig sum af simplere funktioner. Ved praktisk anvendelse heraf må det bemærkes, at en computer ikke kan behandle en uendelig sum: derfor må man i konkrete anvendelser erstatte den uendelige sum i (5.22) med en *endelig sum*, altså med en passende afsnits–sum. Vi må med andre ord forsøge at finde $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(x) - S_N(x)|$$

er tilstrækkeligt lille (mindre end en given tolerance) *for alle $x$ i det betragtede interval.* Det følgende eksempel viser at det ikke altid er muligt.

**Eksempel 5.27** Betragt funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \ x \in ]-1, 1[.$$

Som vi har set i sætning 5.2 er

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \tag{5.25}$$

dette skal forstås på den måde, at afsnitssummen $S_N(x)$ for rækken i (5.25) konvergerer mod $f(x)$ for ethvert $x \in ]-1, 1[$. På den anden side gælder for ethvert $N \in \mathbb{N}$ at

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} x^n \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \right| \\ &= \frac{|x|^{N+1}}{1-x}. \end{aligned}$$

Uanset hvor stort $N \in \mathbb{N}$ vælges kan vi altid finde et $x \in ]-1, 1[$ for hvilket denne differens er så stor som vi måtte ønske (se figur 5.4). Med andre ord er vi ikke i stand til at opnå en god approksimation simultant for alle $x \in ]-1, 1[$.

Bemærk at problemet forsvinder hvis vi kun betragter funktionen $f$ på et interval af typen $[-r, r]$ for et givet $r \in ]0, 1[$: i dette tilfælde gælder for ethvert $x \in [-r, r]$ at $|x|^N \leq r^N$ og $1 - x \geq 1 - r$, så

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} x^n \right| = \frac{|x|^{N+1}}{1-x} \leq \frac{r^{N+1}}{1-r}.$$

Da

$$\frac{r^{N+1}}{1-r} \to 0 \text{ for } N \to \infty$$

kan vi altså gøre

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} x^n \right|$$

vilkårligt lille – simultant for alle $x \in [-r, r]$ – ved at vælge $N \in \mathbb{N}$ tilstrækkelig stort. □

Motiveret af eksempel 5.27 indfører vi nu følgende definition.

**Definition 5.28 (Uniform konvergens)** *Lad $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ være givne funktioner, der er definerede på intervallet $I$. Antag at funktionen*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in I$$

*er veldefineret, altså at rækken er konvergent for alle $x \in I$. Så siges rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ at konvergere uniformt mod $f(x)$ på intervallet $I$ hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ findes et $N_0 \in \mathbb{N}$ således at*

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| \le \epsilon \text{ for alle } x \in I \text{ og alle } N \ge N_0. \tag{5.26}$$

Lad os vende tilbage til eksempel 5.27:

**Eksempel 5.29** Resultatet i eksempel 5.27 viser følgende:

- Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergerer ikke uniformt mod $f(x) = \frac{1}{1-x}$ på intervallet $I = ]-1, 1[$;
- Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergerer uniformt mod $f(x) = \frac{1}{1-x}$ på ethvert interval $I = [-r, r]$, hvor $r \in ]0, 1[$.

□

Eksempel 5.29 er typisk for potensrækker: normalt kan man ikke forvente at en potensrække med konvergensradius $\rho$ konvergerer uniformt på intervallet $]-\rho, \rho[$. På den anden side opnår man altid uniform konvergens ved at betragte et interval der er en anelse mindre:

**Sætning 5.30** *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ være en potensrække med konvergensradius $\rho > 0$. Så er $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uniformt konvergent på ethvert interval af formen $[-r, r]$ hvor $r \in ]0, \rho[$.*

**Bevis:** For ethvert $x \in [-r, r]$ er

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{N} c_n x^n\right| &= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n x^n\right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n x^n| \text{ (se uligheden (4.27))} \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|\, |x|^n.
\end{aligned}$$

Idet $|x| \leq r$ følger det nu at

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{N} c_n x^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|\; r^n;$$

derfor er

$$\max_{x\in[-r,r]} \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{N} c_n x^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|\; r^n. \tag{5.27}$$

Da rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n$ ifølge kvotientkriteriet er absolut konvergent vil udtrykket på højresiden af (5.27) gå mod 0 for $N \to \infty$. Dette viser, at (5.26) er opfyldt. □

Vi afslutter dette afsnit med et par vigtige resultater angående kontinuitet og differentiabilitet af uendelige summer af funktioner. De bygger på begrebet *majorantrække*, som vi definerer først:

**Definition 5.31 (Majorantrække)** *Lad funktionerne $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ være definerede på et interval $I$ og betragt den formelle række*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \;\; x \in I. \tag{5.28}$$

*(i) En række $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ med konstante og positive led $k_n$ er en majorantrække for rækken i* (5.28) *på intervallet $I$ hvis der for hvert $n \in \mathbb{N}$ gælder at*

$$|f_n(x)| \leq k_n, \;\; \forall\, x \in I. \tag{5.29}$$

*(ii) En række $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ der er konvergent og opfylder* (5.29)*, siges at være en konvergent majorantrække for rækken i* (5.28)*.*

Sætningerne i dette afsnit vil vise, at begrebet majorantrække er specielt vigtigt når der findes en konvergent majorantrække.

**Eksempel 5.32** Vi undersøger om følgende rækker har konvergente majorantrækker:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}, \ \ x \in [-\pi, \pi];$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}, \ \ x \in [0, \infty[;$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}, \ \ x \in [1, \infty[.$

For rækken i (i) er $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$; derfor er

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| = \frac{|\sin(nx)|}{n^2}.$$

Idet sinusfunktionen udelukkende antager værdier i intervallet $[-1, 1]$ følger det nu at

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Derfor er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ en majorantrække for rækken i (i). Der er ifølge eksempel 4.34 tale om en konvergent majorantrække.

Vi undersøger nu rækken i (ii). Her er $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$. Da eksponentialfunktionen udelukkende antager positive værdier, ser vi at

$$|f_n(x)| = \left|\frac{e^{-nx}}{n}\right| = \frac{e^{-nx}}{n}.$$

For $n \in \mathbb{N}$ er funktionen $e^{-nx}$ aftagende. For $x \in [0, \infty[$ fås dermed den største værdi for $x = 0$. Derfor sluttes at

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{e^0}{n} = \frac{1}{n}.$$

Altså er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ en majorantrække for rækken i (ii). Vi bemærker at majorantrækken er divergent ifølge eksempel 4.34. Da ovenstående udregning viser at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er den mindste majorantrække der kommer på tale, er konklusionen at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \text{ har ikke en konv. majorantrække på intervallet } [0, \infty[. \qquad (5.30)$$

For rækken i (iii) gøres præcis som i (ii), men vi udnytter at $x \in [1, \infty[$. Dermed antages den største værdi for funktionen $e^{-nx}$ for $x = 1$, og vi slutter at

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{e^{-n}}{n} = \frac{1}{ne^n}.$$

Altså er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n n}$ en majorantrække for rækken i (iii). Denne majorantrække er konvergent (check det, for eksempel ved brug af kvotientkriteriet). Konklusionen er at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \text{ har en konvergent majorantrække på intervallet } [1, \infty[. \quad (5.31)$$

□

Læg nøje mærke til de forskellige konklusioner i (5.30) og (5.31): de viser, at man ved undersøgelse af om der findes en konvergent majorantrække eller ej, skal være meget omhyggelig med at angive det betragtede interval.

Vi kan nu formulere en betingelse som sikrer at sumfunktionen hørende til den uendelige række i (5.28) er kontinuert:

**Sætning 5.33 (Kontinuitet af sumfunktion)** *Antag at*

*(i) Funktionerne $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ er definerede og kontinuerte på et interval $I$;*

*(ii) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække på $I$.*

*Så konvergerer den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformt, og sumfunktionen*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \; x \in I \quad (5.32)$$

*er kontinuert.*

Sætning 5.33 betegnes i engelsksproget litteratur undertiden *Weierstrass' M-test*; den bevises i appendiks A.8.

Ofte har man brug for at integrere en uendelig række bestående af integrable funktioner. Hvis rækken konvergerer uniformt har man lov til at gøre dette led for led. Også dette resultat bevises i appendiks A.8:

**Sætning 5.34 (Ledvis integration af sumfunktion)** *Under antagelserne i sætning 5.33 gælder for ethvert valg af $a, b \in I$ at*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Til slut nævner vi en betingelse, der sikrer, at sumfunktionen i (5.32) er differentiabel:

**Sætning 5.35 (Ledvis differentiation af sumfunktion)** *Antag at*

*(i) Funktionerne $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ er definerede og differentiable på intervallet $I$, med kontinuerte afledede;*

*(ii) Funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er veldefineret på intervallet $I$;*

*(iii) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ har en konvergent majorantrække.*

*Så er funktionen $f$ differentiabel, og*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \ x \in I.$$

Sætning 5.35 bevises også i appendiks A.8. Vi bemærker, at sætningerne 5.33–5.35 holder en anelse mere generelt end antydet foroven: antagelsen om eksistens af en konvergengent majorantrække kan erstattes af at den pågældende række er uniformt konvergent, men i praksis verificeres denne betingelse jo netop ved at finde en konvergent majorantrække.

Sætning 5.34 har en vigtig konsekvens for integration af potensrækker:

**Korollar 5.36 (Integration af potensrække)** *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ være en potensrække med konvergensradius $\rho > 0$. Så gælder for ethvert $b \in ]-\rho, \rho[$ at*

$$\int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} b^{n+1}.$$

**Bevis:** Ifølge sætning 5.30 er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uniformt konvergent på intervallet $I = [0, b]$. Det følger nu af sætning 5.34 at

$$\begin{aligned} \int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^b c_n x^n dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \right]_{x=0}^{b} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} b^{n+1}. \end{aligned}$$

□

**Eksempel 5.37** Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(nx), \ x \in \mathbb{R},$$

har formen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ med

$$f_n(x) = \frac{1}{3^n} \cos(nx).$$

Det ses at

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{3^n}\cos(nx)\right| \le \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dermed er $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ en konvergent majorantrække for $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Det følger derfor af sætning 5.33 at funktionen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos(nx),\ x \in \mathbb{R},$$

er kontinuert. Idet $f_n'(x) = -\frac{n}{3^n}\sin(nx)$, ses endvidere at

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin(nx),\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.33}$$

Rækken (5.33) har den konvergente majorantrække $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ (check konvergensen, for eksempel via kvotientkriteriet). Via sætning 5.34 kan vi nu slutte at funktionen $f$ er differentiabel, og at

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin(nx),\ x \in \mathbb{R}.$$ □

Lad os anvende vores resultater til at vurdere størrelsen af et bestemt integral, som ikke kan beregnes ved at finde en stamfunktion:

**Eksempel 5.38** Det kan vises, at integralet

$$\int e^{-x^2}dx$$

ikke kan udtrykkes ved hjælp af de kendte funktionstegn: vi kan altså ikke beregne det bestemte integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

ved stamfunktionsbestemmelse. Men ifølge (5.10) (med $x$ erstattet af $-x^2$) er

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$$

Ved hjælp af korollar 5.36 ses nu at

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1\frac{(-x^2)^n}{n!}\,dx\right).$$

Ved udregning af integralet ses at

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(-x^2)^n}{n!}\,dx = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,dx &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{2n}\,dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\right]_{x=0}^1 \\ &= (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot n!}.\end{aligned}$$

Dermed er

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot n!}. \tag{5.34}$$

Vi har herved opnået et eksakt udtryk for integralet, udtrykt som en uendelig sum. Vi kan finde en vilkårlig præcis vurdering af integralet, simpelthen ved at inkludere tilstrækkeligt mange led i afsnitssummen hørende til (5.34). Vi kan endda vurdere hvor mange led vi skal medtage for at opnå en ønsket præcision: ifølge sætning 4.38 er

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\cdot n!} - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\cdot n!}\right| \le \frac{1}{(2N+3)(N+1)!}.$$

Hvis vi ønsker at bestemme summen af rækken i (5.34) med en fejl på højst $10^{-3}$ kan vi vælge $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\frac{1}{(2N+3)(N+1)!} \le 10^{-3}.$$

Denne ulighed er opfyldt allerede for $N = 4$, så med en fejl på højst $10^{-3}$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\cdot n!} \approx \sum_{n=0}^{4}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\cdot n!} = 0.747. \qquad \square$$

## 5.5 En anvendelse: signaltransmission

Vi har nu færdiggjort den matematiske behandling af generelle uendelige rækker. Som afslutning diskuteres kort en konkret anvendelse heraf.

Moderne signalbehandling foregår altid ved at det givne signal omformes til en række tal. Man kan sige, at det netop er hvad en potensrækkefremstilling gør: hvis det givne signal er en funktion $f$ med en potensrækkefremstilling

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{5.35}$$

så er hele informationen om $f$ "gemt" i koefficienterne $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Med andre ord: hvis vi kender koefficienterne $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, så kan vi umiddelbart bruge (5.35) til at finde ud af hvilken funktion vi har at gøre med. Lad os illustrere hvorledes denne egenskab kan bruges i forbindelse med signaltransmission:

**Eksempel 5.39** Antag at en afsender $\mathcal{S}$ ønsker at sende et signal (f.eks. et billede eller et vilkårligt andet signal) til en modtager $\mathcal{R}$. Vi forestiller os, at signalet er givet som en funktion $f$, som har en potensrækkefremstilling. Så kan transmissionen i princippet foregå på følgende måde:

- $\mathcal{S}$ finder koefficienterne $c_0, c_1, \ldots$ således at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$;
- $\mathcal{S}$ sender koefficienterne $c_0, c_1, \ldots$;
- $\mathcal{R}$ modtager koefficienterne $c_0, c_1, \ldots$;
- $\mathcal{R}$ rekonstruerer signalet ved at multiplicere de modtagne koefficienter $c_n$ med $x^n$ og danne den uendelige række $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

I praksis er der et par skridt mere end beskrevet foroven. For eksempel kan $\mathcal{S}$ ikke sende en uendelig følge af tal $c_0, c_1, \ldots$: det er kun muligt at sende en endelig følge $c_0, c_1, \ldots, c_N$. Valget af antallet af led der sendes, dvs. $N$, skal foretages med omhu: vi ønsker at det signal som faktisk sendes, altså

$$\tilde{f}(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_N x^N = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n,$$

ser ud og opfører sig som det originale signal

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_N x^N + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Mere præcis betyder det, at hvis vi kan tolerere en afvigelse mellem det transmitterede signal og det originale signal på $\epsilon$, så skal $N$ vælges således at

$$\left| f(x) - \tilde{f}(x) \right| \leq \epsilon$$

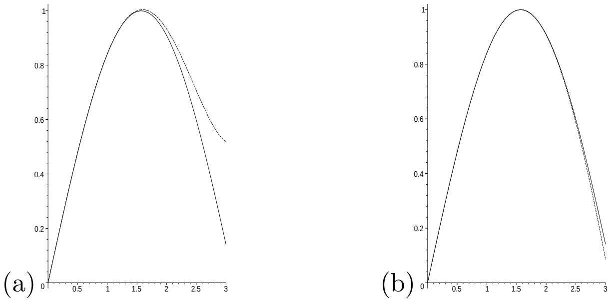
for alle $x$, altså så

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n x^n \right| \leq \epsilon.$$

Hvis vi ønsker at kunne gøre dette for en vilkårlig tolerance $\epsilon > 0$ betyder det at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ skal konvergere uniformt.

Som et konkret eksempel forestiller vi os at vi vil sende et signal givet ved funktionen

$$f(x) = \sin x, \ x \in [0, 3]$$



**Figur 5.40** *(a): Funktionerne* $f(x) = \sin x$ *(fuldt optrukket) og* $\tilde{f}(x) = x - 0.1666x^3 + 0.0083x^5$. *(b): Funktionerne* $f(x) = \sin x$ *(fuldt optrukket) og* $\tilde{f}(x) = x - 0.1666x^3 + 0.0083x^5 - 0.000198x^7$.

fra $\mathcal{S}$ til $\mathcal{R}$. I eksempel 5.9 har vi vist at

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + \cdots .$$

Da

$$\frac{1}{6} \approx 0.1666, \ \frac{1}{120} \approx 0.0083$$

kan $\mathcal{S}$ f.eks. vælge at sende tallene

$$0; 1;\ 0;\ -0.1666;\ 0;\ 0.0083.$$

Så vil modtageren $\mathcal{R}$ rekonstruere signalet som

$$\tilde{f}(x) = x - 0.1666x^3 + 0.0083x^5 \approx f(x).$$

Figur 5.40(a) viser at det rekonstruerede signal er tæt på det sendte signal for $x \in [0, 2]$, men at det afviger ret kraftigt for $x \in [2, 3]$. En bedre rekonstruktion opnås ved også at sende koefficienten hørende til $x^7$, nemlig $-\frac{1}{7!} \simeq -0.000198$; herved fås

$$\tilde{f}(x) = x - 0.1666x^3 + 0.0083x^5 - 0.000198x^7,$$

se figur 5.40(b). Givet en vilkårlig acceptabel tolerance kan vi regne os frem til hvor mange led vi skal medtage, se opgave 127.

I praksis foregår signaltransmission ved brug af andre metoder end den ovenfor beskrevne, blandt andet fordi mængden af funktioner der har en potensrækkefremstilling er ret begrænset. □

# Kapitel 6

## Fourieranalyse

Indtil nu har vi primært beskæftiget os med potensrækkefremstillinger. Desværre er klassen af funktioner med en sådan fremstilling ret begrænset, så man har ofte brug for at arbejde med andre typer rækkefremstillinger.

Fourieranalyse er et redskab, der er udviklet til behandling af periodiske funktioner. Kort sagt handler det om at fremstille periodiske funktioner som uendelige summer af trigonometriske funktioner.

Afsnit 6.1 og afsnit 6.2 indfører Fourierrækkerne og behandler de vigtigste approksimations-teoretiske aspekter. Afsnit 6.3 introducerer Fourierrækker på kompleks form, en bekvem omskrivning i termer af komplekse eksponentialfunktioner. Afsnit 6.4 handler om Parsevals sætning, som er et redskab til at bestemme hvilken afsnitssum man skal benytte for at opnå en ønsket approksimation. Afsnit 6.5 relaterer Fourierrækkerne til det velkendte begreb ortonormalbaser i vektorrum. Endelig giver afsnit 6.6 en kort introduktion til Fouriertransformationen, som bruges til at opnå integralfremstillinger af ikke-periodiske funktioner. Et moderne supplement hertil, nemlig waveletteori, diskuteres ganske kort i afsnit 6.7.

### 6.1 Fourierrækker

I dette afsnit introduceres en ny type rækkefremstilling, der er velegnet til analyse af periodiske funktioner. Husk at en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ har periode $T$ hvis

$$f(x+T) = f(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Af notationsmæssige grunde vil vi i hele kapitlet antage at perioden er $T = 2\pi$; de tilsvarende resultater for funktioner med en anden periodelængde er nævnt i appendiks C.

Vi antager endvidere at de betragtede funktioner $f$ tilhører vektorrummet

$$L^2(-\pi,\pi) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}. \tag{6.1}$$

**Definition 6.1 (Fourierrække)** *Til en $2\pi$-periodisk funktion $f \in L^2(-\pi,\pi)$ knyttes formelt (hvilket skrives "$\sim$") rækkefremstillingen*

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{6.2}$$

*hvor koefficienterne $a_n$ og $b_n$ defineres ved*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$

*og*

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx,\ \ n = 1, 2, \ldots\ . \tag{6.4}$$

*Rækken (6.2) kaldes Fourierrækken hørende til $f$, og tallene $a_n, b_n$ kaldes Fourierkoefficienter.*

Antagelsen $f \in L^2(-\pi,\pi)$ i (6.1) sikrer at de integraler der optræder i udtrykkene for $a_n$ og $b_n$ er veldefinerede.

Vi bemærker, at der både i (6.2) og i integraludtrykkene for $a_n$ og $b_n$ optræder parenteser omkring $nx$. **Der er tradition for at undlade at skrive disse parenteser, og de vil kun undtagelsesvist optræde i det følgende: sammenlign** (6.2) **med** (6.5) **nedenfor.**

Som tidligere er den $N$'te afsnitssum af Fourierrækken givet ved

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{6.5}$$

Det er meget vigtigt at notere at udtrykket (6.2) kun definerer Fourierrækken på et formelt plan: på nuværende tidspunkt har vi ikke taget stilling til om rækken overhovedet er konvergent, eller hvad den har med funktionen $f$ at gøre. Spørgsmål af denne type er særdeles delikate for Fourierrækker; vi vender tilbage hertil i afsnit 6.2. Dog kan vi allerede nu se hvorfor vi begrænser os til at betragte $2\pi$-periodiske funktioner: alle de trigonometriske funktioner der optræder i Fourierrækken er $2\pi$-periodiske, så hvis vi ønsker at der skal være en sammenhæng mellem funktionen $f$ og Fourierrækken er denne antagelse nødvendig.

Beregning af Fourierkoefficienterne kan ofte simplificeres ved anvendelse af de følgende regneregler, som bevises i opgave 863.

**Lemma 6.2 ( Regneregler for integraler)** *Lad* $f \in L^2(-\pi, \pi)$. *Så gælder følgende:*

**(R1)** *Hvis* $f$ *er* $2\pi$*-periodisk, så er*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx, \ \forall a \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

**(R2)** *Hvis* $f$ *er en lige funktion, dvs.* $f(x) = f(-x)$ *for alle* $x$*, så er*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)\,dx, \ \forall a > 0. \tag{6.7}$$

*Reglen (R2) gælder også hvis der er et endeligt antal* $x$*-værdier i intervallet* $[-a, a]$ *for hvilke* $f(x) \neq f(-x)$.

**(R3)** *Hvis* $f$ *er en ulige funktion, dvs.* $f(x) = -f(-x)$ *for alle* $x$*, så er*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \ \forall a > 0. \tag{6.8}$$

*Reglen (R3) gælder også hvis der er et endeligt antal* $x$*-værdier i intervallet* $[-a, a]$ *for hvilke* $f(x) \neq -f(-x)$.

Hvis $f$ er en lige funktion, så er funktionen $x \mapsto f(x)\cos nx$ en lige funktion, og $x \mapsto f(x)\sin nx$ er ulige; hvis $f$ er en ulige funktion, så er funktionen $x \mapsto f(x)\cos nx$ ulige, og $x \mapsto f(x)\sin nx$ er lige (se eventuelt opgave 861). Ved at kombinere disse bemærkninger med regnereglerne i lemma 6.2 opnås følgende:

**Sætning 6.3 (Fourierkoefficienter for lige og ulige funktioner)**

*(i) Hvis* $f$ *er en lige funktion, så er* $b_n = 0$ *for alle* $n$*, og*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \ dx, \ n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{6.9}$$

*(ii) Hvis* $f$ *er en ulige funktion, så er* $a_n = 0$ *for alle* $n$*, og*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \ dx, \ n = 1, 2, \dots \ . \tag{6.10}$$

Sætning 6.3 gælder også hvis $f$ ikke er lige (resp. ulige) i streng forstand: det er tilladt at der er et endeligt antal $x$-værdier i intervallet $[-\pi, \pi]$ for hvilke $f(x) \neq f(-x)$ (henh. $f(x) \neq -f(-x)$). Vi kan formulere resultatet i sætning 6.3 i ord:

**Korollar 6.4 (Fourierrække for lige og ulige funktioner)**

*(i) Fourierrækken for en lige funktion er en ren cosinus-række, dvs. den består udelukkende af cosinus-led samt et konstant led,*

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

*(ii) Fourierrækken for en ulige funktion er en ren sinus-række,*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

.

Lad os nu finde Fourierrækkerne for nogle konkrete $2\pi$-periodiske funktioner. Bemærk, at det for sådanne funktioner er tilstrækkeligt at specificere deres funktionsværdier på et interval af længde $2\pi$, f.eks. på intervallet $]-\pi,\pi]$.

**Eksempel 6.5 (Firkantfunktion)** Betragt *firkantfunktionen*

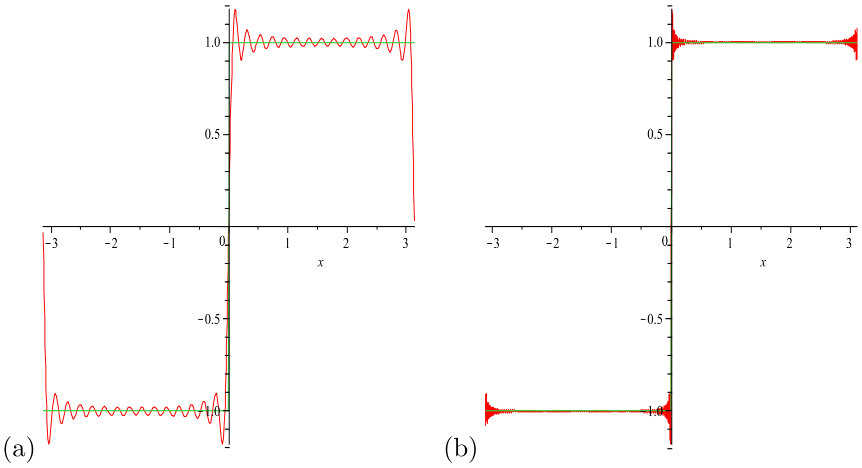
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x \in ]-\pi, 0[, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ 1 & \text{hvis } x \in ]0, \pi[, \\ 0 & \text{hvis } x = \pi. \end{cases} \tag{6.11}$$

Funktionen tænkes udvidet til en $2\pi$-periodisk funktion, der er defineret på $\mathbb{R}$. Funktionen $f$ er ulige, så ifølge sætning 6.3 er $a_n = 0$ for alle $n$. Endvidere er

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos nx\right]_{x=0}^{\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ er lige,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{hvis } n \text{ er ulige.} \end{cases} \end{aligned}$$

Bemærk at divisionen med $n$ i denne udregning er tilladt fordi vi ved at $n \geq 1$ (der er jo kun koefficienter $b_n$ for $n \geq 1$). Fourierrækken er således

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \sum_{n \text{ ulige}} \frac{4}{n\pi}\sin nx. \end{aligned} \tag{6.12}$$




**Figur 6.6** *(a): Funktionen $f$ givet ved* (6.11) *og afsnitssummen $S_{15}$ af Fourierrækken i* (6.13)*. (b): Funktionen $f$ i* (6.11) *og afsnitssummen $S_{100}$ af Fourierrækken i* (6.13)*. Bemærk, at afsnitssummerne "skyder over målet" i omegnen af punkter hvori $f$ er diskontinuert.*

Bemærk at der i (6.12) kun summeres over led med ulige værdier af $n$, altså $n = 1, 3, 5, \ldots$. De ulige tal er netop tal som kan skrives som $n = 2k-1$, hvor $k \in \mathbb{N}$. Ved indsættelse i (6.12) fås altså at Fourierrækken er

$$f \sim \;=\; \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin((2k-1)x) \tag{6.13}$$

$$= \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots). \tag{6.14}$$

Figur 6.6 viser at afsnitssummerne af Fourierrækken giver en god approksimation af $f(x)$ i de punkter $x$ hvori $f$ er kontinuert. Figuren viser også at der er et problem i omegnen af de punkter hvori $f$ ikke er kontinuert: alle de betragtede afsnitssummer "skyder over målet" tæt på diskontinuitetspunktet. Dette viser sig at være et generelt fænomen for Fourierrække; det kaldes *Gibbs fænomen,* og det optræder for alle Fourierrækker hørende til ikke-kontinuerte funktioner, altså funktioner "med spring". Man kan vise, at Fourierrækken skyder over med ca. 9% af springets størrelse, uanset hvilken funktion man betragter.

Det er interessant at bemærke, at Fourierrækken (6.13) konvergerer punktvist for alle $x \in \mathbb{R}$; dette følger af sætning 6.12 fra det følgende afsnit, men er ikke indlysende udfra de resultater vi diskuterede i behandlingen af de uendelige rækker i kapitel 4. For at illustrere problemerne bemærkes at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ i sig selv er divergent; dette følger af ek-

sempel 4.34. Så konvergensen af (6.13) er en konsekvens af at leddene $\frac{1}{2n-1}$ bliver multiplicerede med $\sin((2n-1)x)$. Rækken (6.13) er heller ikke en alternerende række, og den er ikke absolut konvergent: f.eks. er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x) \right|$$

divergent for $x = \pi/2$. Vi kan altså konkludere at konvergensen af (6.13) er en konsekvens af komplicerede fortegnsskift i leddene $\sin((2n-1)x)$. □

**Eksempel 6.7** Betragt funktionen

$$f(x) = x, \;\; x \in [-\pi, \pi[,$$

igen udvidet til en $2\pi$-periodisk funktion. Sætning 6.3 viser at $a_n = 0$ for alle $n$, og at

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \; dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \; dx.$$

Ved hjælp af delvis integration ses at

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin nx \; dx &= \left[ -\frac{x}{n} \cos nx \right]_{x=0}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \; dx \\ &= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \left[ \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_{x=0}^{\pi}. \end{aligned}$$

Bemærk at

$$\cos n\pi = (-1)^n, \;\; \text{og} \;\; \sin n\pi = 0.$$

Derfor fås nu at

$$\int_0^{\pi} x \sin nx \; dx = -\frac{\pi}{n}(-1)^n + 0 = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}.$$

Altså er

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \; dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},$$

og Fourierrækken er

$$\begin{aligned} f &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \qquad (6.15) \\ &= 2 \left( \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \cdots \right). \end{aligned}$$

I Maplekompendiet afsnit D.4.5 vises graferne for funktionen $f$ og nogle udvalgte afsnitssummer: det ses, at afsnitssummerne approksimerer $f$ godt, pånær i omegnen af diskontinuitetspunkter. Se sætning 6.12 i næste afsnit, der giver en teoretisk forklaring på dette. □

Maplekompendiet indeholder i afsnit D.4.5 nogle kommandoer, der kan benyttes ved beregning af Fourierkoefficienterne. Både ved håndregning og ved brug af Maple dukker der for det meste nogle specialtilfælde op, som må udregnes separat. Dette gælder specielt Fourierkoefficienten $a_0$:

**Eksempel 6.8** Betragt den $2\pi$-periodiske funktion givet ved

$$f(x) = x^2, \ x \in [-\pi, \pi[.$$

Ved direkte indtastning i Maple fås at

$$\int x^2 \cos nx dx = \frac{n^2x^2 \sin nx - 2\sin nx + 2nx \cos nx}{n^3}. \tag{6.16}$$

Det er klart at dette udtryk ikke er gyldigt for $n = 0$, så Fourierkoefficienten $a_0$ må regnes ud separat:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

De øvrige Fourierkoefficienter kan regnes ud ved brug af formlen (6.16), og Fourierrækken bliver

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}\cos nx.$$ □

## 6.2 Fouriers sætning og approksimation via Fourierrækker

Vi vender os nu mod spørgsmålet om punktvis konvergens af Fourierrækker. Med vores erfaring fra teorien for potensrækker i tankerne, kunne man ønske at Fourierrækken for en funktion $f$ konvergerer mod $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Dette er dog ikke nødvendigvis tilfældet:

**Eksempel 6.9** Vi foretager en mindre modifikation af funktionen $f$ i eksempel 6.5, og betragter den $2\pi$-periodiske funktion givet ved

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x \in ]-\pi, 0[, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ 1 & \text{hvis } x \in ]0, \pi]. \end{cases}$$

Bemærk at den eneste forskel mellem funktionen $f$ i eksempel 6.5 og funktionen $g$ er, at værdien i $x = \pi$ (og tilsvarende for $x = \pi + p2\pi, p \in \mathbb{Z}$) er ændret fra $f(\pi) = 0$ til $g(\pi) = 1$. Som bekendt ændrer integralet af en funktion sig ikke hvis funktionens værdier ændres i nogle enkelte punkter; heraf følger, at funktionerne $f$ og $g$ har de samme Fourierkoefficienter, og dermed den samme Fourierrække. I de punkter $x \in \mathbb{R}$ for hvilke $f(x) \neq g(x)$, kan

Fourierrækken ikke konvergere mod både $f(x)$ og $g(x)$. Generelt kan man altså *ikke* regne med at Fourierrækken for en funktion $f$, evalueret i et punkt $x$, konvergerer mod $f(x)$. □

Ovenstående eksempel viser at man må kræve ekstra betingelser opfyldt hvis man ønsker en sammenhæng mellem funktionsværdierne for en funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ og dens Fourierrække. Vi vil nu introducere sådanne betingelser.

**Definition 6.10 (Stykkevis differentiabel funktion)** *En $2\pi$-periodisk funktion $f$ defineret på $\mathbb{R}$ siges at være stykkevis differentiabel hvis der findes endeligt mange punkter $x_1, x_2, \ldots, x_n$,*

$$-\pi = x_1 < x_2 < \cdots <_{n-1} < x_n = \pi$$

*og differentiable funktioner $f_i : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{C}$ således at $f_i'$ er kontinuert og*

$$f(x) = f_i(x), \;\; x \in ]x_i, x_{i+1}[.$$

Betingelsen i definition 6.10 er ret teknisk, og kræver en nærmere forklaring. Som det fremgåf eksempel 6.5 vil vi ofte betragte $2\pi$-periodiske funktioner, der er givet ved forskellige funktionsudtryk i forskellige delintervaller af $] - \pi, \pi[$. Lad os antage at vi blot har at gøre med to intervaller. I generel notation betyder det at vi betragter en funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{for } x \in ] - \pi, x_2[, \\ f_2(x), & \text{for } x \in ]x_2, \pi[. \end{cases} \tag{6.17}$$

For en funktion af denne type er definition 6.10 opfyldt hvis vi kan verificere at funktionen $f_1$ kan opfattes som en differentiabel funktion på det lukkede interval $[-\pi, x_2]$, og funktionen $f_2$ kan opfattes som en differentiabel funktion på det lukkede interval $[x_2, \pi]$. Lad os illustrere dette med et eksempel.

**Eksempel 6.11** Lad os verificere at firkantfunktionen $f$ i eksempel 6.5,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x \in ] - \pi, 0[, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ 1 & \text{hvis } x \in ]0, \pi[, \\ 0 & \text{hvis } x = \pi. \end{cases},$$

er stykkevis differentiabel. Vi ser at funktionen har formen (6.17) med

$$f_1(x) = -1, \, x \in ] - \pi, 0[, \quad f_2(x) = -1, \, x \in ]0, \pi[.$$

Begge funktioner $f_1$ og $f_2$ kan udvides til differentiable funktioner på de respektive lukkede intervaller: hvis vi sætter

$$f_1(x) = -1, \, x \in [-\pi, 0]$$

fås jo en differentiabel funktion, og tilsvarende for $f_2$. Vi konkluderer at firkantfunktionen er stykkevis differentiabel, som ønsket. □

Vi er nu klar til at redegøre for Fourierrækkernes konvergensforhold for stykkevis differentiable funktioner. Resultatet er en af hovedsætningerne i teorien for Fourierrækker, og beviset er særdelse omfattende (se appendiks A.9). Vi vil benytte følgende korte betegnelser for grænseværdierne fra højre og venstre i et givet punkt $x$, for en given funktion $f$ :

$$f(x^+) := \lim_{y \to x^+} f(y), \qquad f(x^-) := \lim_{y \to x^-} f(y).$$

**Sætning 6.12 (Fouriers sætning)** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Så konvergerer Fourierrækken for $f$ punktvis for alle $x \in \mathbb{R}$. For summen af Fourierrækken gælder følgende:*

*(i) Hvis $x$ er et punkt hvori $f$ er kontinuert, så er*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x). \tag{6.18}$$

*(ii) Hvis $x$ er et punkt hvori $f$ er diskontinuert, så er*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Læseren bedes være meget opmærksom på den præcise formulering af sætning 6.12: under de givne forudsætninger gælder altså at Fourierrækken er konvergent for alle $x$, men summen af rækken er *ikke altid* lig med $f(x)$! Hvis Fourierækken konvergerer mod $f(x)$ *for alle* $x \in \mathbb{R}$ vil vi erstatte symbolet "$\sim$" i definitionen af Fourierrækken med "=."Sætning 6.12 fortæller os at dette altid er muligt for kontinuerte stykkevis differentiable funktioner:

**Korollar 6.13** *Antag at $f$ er en kontinuert, stykkevis differentiabel, og $2\pi$-periodisk funktion. Så gælder følgende:*

*(i) For ethvert $x \in \mathbb{R}$ er*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{6.19}$$

*(ii) Fourierrækken konvergerer uniformt mod $f$, og den maksimale afvigelse mellem $f(x)$ og afsnitssummen $S_N(x)$ kan vurderes ved*

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt}. \tag{6.20}$$

Der findes også funktioner der ikke er kontinuerte, og hvor symbolet "$\sim$" alligevel kan erstattes med "=":

**Eksempel 6.14** For firkantfunktionen i (6.11) er

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.21}$$

Vi viser (6.21) ved at dele op i tilfældene $x \notin \pi\mathbb{Z} := \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$ og $x \in \pi\mathbb{Z}$. For $x \notin \pi\mathbb{Z}$ følger resultatet af sætning 6.12(i). For $x \in \pi\mathbb{Z}$ følger det af (ii) i samme sætning og den specielle definition af $f(0)$ og $f(\pi)$: et andet valg af disse værdier ville ikke ændre Fourierrækken, men (6.21) ville ikke længere være opfyldt for $x \in \pi\mathbb{Z}$. Hvis vi f.eks. betragter funktionen $g$ i eksempel 6.9 kan vi altså *ikke* erstatte symbolet "$\sim$" med "=." □

Sætning 6.12 blev publiceret af J. Fourier i 1822 i artiklen [5], dog med en (forkert) påstand om at Fourierrækken konvergerer uden nogen antagelse på funktionen $f$. Hans begrundelser var ret intuitive, og leder langt fra op til nutidens ubønhørlige krav om præcision i matematiske sammenhænge. Allerede omkring det tidspunkt hvor artiklen blev publiceret gav den anledning til heftige diskussioner, og det blev bl.a. vist, at resultatet ikke holder helt så generelt som Fourier hævdede. Faktisk kan det gå rigtig galt hvis betingelserne i sætning 6.12 ikke er opfyldt: der findes funktioner, for hvilke alle Fourierkoefficienter er veldefinerede, men for hvilke Fourierrækken ikke er konvergent for noget $x \in \mathbb{R}$! Det skal nævnes, at sådanne funktioner skal findes udenfor vektorrummet $L^2(-\pi, \pi)$, som er rammen for indeværende fremstilling. For funktioner i $L^2(-\pi, \pi)$ vil Fourierrækken konvergere for næsten alle $x \in \mathbb{R}$; den præcise betydning af "næsten alle" kan findes i lærebøger om målteori, se f.eks. [11].

Når dette er sagt, bør man også tilføje, at Fourier havde en beundringsværdig intuition. Stort set havde han jo ret, og hans påstand havde en afgørende indflydelse på matematikkens udvikling: en stor del af matematikken i det nittende og tyvende århundrede blev udviklet som et led i processen med at afklare konvergensforholdene for Fourierrækker, samt at udforske deres potentiale, f.eks. til løsning af differentialligninger.

Sætning 6.12 er vigtig, fordi den viser hvorledes en stor klasse af funktioner kan fremstilles som en uendelig sum af trigonometriske funktioner. Sætningen kan endvidere benyttes til at bestemme summen af mange typer rækker:

**Eksempel 6.15** Lad os anvende (6.21) på $x = \pi/2$. Først bemærkes, at man ved at se på $n = 1, 2, 3, 4$ kan indse at

$$\sin((2n-1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^{n-1};$$

da $f(\pi/2) = 1$ viser (6.21) nu at

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(-1)^{n-1}.$$

Vi slutter at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(-1)^{n-1} = \frac{\pi}{4}.$$ □

Det skal understreges at regningerne i eksempel 6.15 kun går godt fordi vi har vist at der gælder *lighedstegn* i (6.21) for $x = \pi/2$: overvejelser af denne type kan *ikke* gennemføres for Fourierrækker før det er vist at symbolet "$\sim$"kan erstattes af "=."

For en kontinuert funktion $f$, implicerer antagelserne i korollar 6.13 at Fourierrækken konvergerer uniformt mod $f$. Uligheden (6.20) fortæller os hvor mange led man skal tage med i Fourierrækken for at opnå en ønsket approksimation af funktionen $f$:

**Korollar 6.16** *Antag at $f$ er en kontinuert, stykkevis differentiabel, og $2\pi$-periodisk funktion. Lad $\epsilon > 0$ være givet. Så er uligheden*

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \epsilon \tag{6.22}$$

*opfyldt for alle $x \in \mathbb{R}$, hvis $N$ vælges således at*

$$N \geq \frac{\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2dt}{\pi\epsilon^2}. \tag{6.23}$$

**Bevis:** Ifølge korollar 6.13 er

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2dt};$$

derfor er uligheden (6.22) opfyldt hvis

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2dt} \leq \epsilon,$$

eller

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2dt} \leq \sqrt{N}.$$

Det ønskede resultat fås nu ved at kvadrere denne ulighed. □

Bemærk at (6.23) er et “worst case estimate”: det giver en værdi for $N \in \mathbb{N}$ som kan bruges uanset hvilken funktion $f$ (tilfredsstillende betingelserne i korollar 6.16) vi startede med. For at minimere beregningsarbejdet ønsker man normalt at vælge $N$ så lille som muligt. Af denne grund formulerer vi nu et resultat mere for approksimation af en funktion via Fourierrækkens afsnitssummer. Det kan bruges hvis Fourierkoefficienterne er kendte, og resultatet leder undertiden til mindre værdier for $N$ end den der angives i (6.23).

**Sætning 6.17** *Antag at funktionen $f$ er $2\pi$-periodisk, kontinuert, og stykkevis differentiabel, med Fourierkoefficienter $a_n, b_n$. Så gælder for ethvert $N \in \mathbb{N}$ at*

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.24}$$

**Bevis:** Ifølge sætning 6.12 implicerer antagelserne at Fourierrækken for $f$ konvergerer mod $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Via (6.18) og (6.5) ses nu at

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &= \left| \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right|. \end{aligned}$$

Ved at anvende trekantsuligheden for uendelige rækker, se (4.27), fås hermed

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx|. \tag{6.25}$$

Vi bruger nu den sædvanlige trekantsulighed, der viser at

$$\begin{aligned} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| &\leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \\ &= |a_n|\,|\cos nx| + |b_n|\,|\sin nx| \\ &\leq |a_n| + |b_n|. \end{aligned}$$

Alt i alt opnår vi dermed ved indsættelse i (6.25) at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|), \tag{6.26}$$

som ønsket.

Bemærk at man strengt taget bør antage at rækken i (6.26) er konvergent for at kunne benytte (4.27). Dette er ikke nødvendigvis opfyldt: i

tilfælde af at rækken er divergent giver sætning 6.17 ikke nogen interessant information. □

I det følgende eksempel sammenlignes korollar 6.16 og sætning 6.17.

**Eksempel 6.18** Betragt den $2\pi$-periodiske funktion $f$ givet ved

$$f(x) = x^2, \ x \in [-\pi, \pi[.$$

Vi ønsker at bestemme $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 0.1 \text{ for alle } x \in \mathbb{R}. \tag{6.27}$$

Ifølge eksempel 6.8 er Fourierrækken for $f$ givet ved

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}\cos nx. \tag{6.28}$$

Ifølge korollar 6.13 konvergerer Fourierrækken uniformt mod $f$, og vi kan erstatte symbolet "$\sim$"med "=". Altså er

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}\cos nx, \ x \in \mathbb{R}.$$

Lad os først anvende (6.23). Uligheden viser, at (6.27) er tilfredsstillet hvis

$$N \geq \frac{\int_{-\pi}^{\pi}(2t)^2 dt}{\pi \cdot 0.1^2} = \frac{8\pi^3}{3\pi \cdot 0.1^2} = \frac{800\pi^2}{3} \approx 2632.$$

Lad os nu anvende sætning 6.17. Via (6.24), efterfulgt af anvendelse af (4.35) i eksempel 4.36, ses at

$$|f(x) - S_N(x)| \quad \leq \quad 4 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{N}.$$

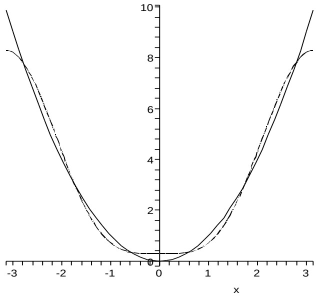
Altså er (6.27) opfyldt hvis

$$\frac{4}{N} \leq 0.1,$$

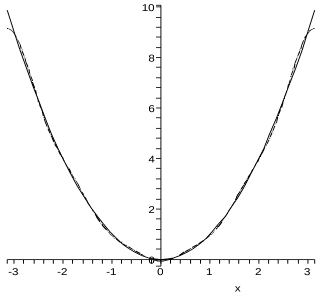
dvs. for $N \geq 40$.

For funktionen $f$ i indeværende eksempel leder sætning 6.17 således til en væsentlig mindre værdi for $N$, og dermed til et meget mere anvendeligt resultat, end korollar 6.16. Forskellen mellem de værdier man opnår for $N$ ved brug af disse resultater bliver endnu større hvis vi ønsker bedre præcision: hvis vi formindsker den acceptable afvigelse $\epsilon$ med en faktor 10, så vil

- korollar 6.16 forøge værdien af $N$ med faktoren 100;
- sætning 6.17 vil forøge værdien af $N$ med ca. en faktor 10.




(a)




(b)

**Figur 6.19** *(a): Funktionen* $f(x) = x^2$ *og afsnitssummen* $S_2(x)$ *af Fourierrækken i* (6.28) *(stiplet), vist på intervallet* $[-\pi, \pi]$. *(b): Funktionen* $f(x) = x^2$ *og afsnitssummen* $S_5(x)$ *af Fourierrækken i* (6.28) *(stiplet), vist på intervallet* $[-\pi, \pi]$.

Vi bemærker, at denne overvejelse er baseret på valget af funktionen $f$: forskellen mellem brug af korollar 6.16 og sætning 6.17 afhænger af den givne funktion.

Figur 6.19 viser at allerede afsnitssummen $S_5$ giver en god approksimation af $f(x)$, pånær for $x$-værdier der er tæt på $\pm\pi$. For også at opnå en tilfredsstillende approksimation tæt på $x = \pm\pi$ er det nødvendigt at vælge væsentligt større værdier for $N$. For eksempel giver $S_{20}$ en særdeles god approksimation af $f(x)$ på intervallet $[-3.1, 3.1]$, med en afvigelse der aldrig overstiger 0.005; men på intervallet $[3.1, \pi]$ vokser afvigelsen, og den største afvigelse er ca. 0.2. □

## 6.3 Fourierrækker på kompleks form

Vores definition af Fourierrækkerne i afsnit 6.1 leder til en del bogholderi: vi skal holde styr på definitionerne af $a_n$ og $b_n$ for $n \in \mathbb{N}$, samt at $a_0$ skal ganges med faktoren 1/2 i Fourierrækken. Vi skal nu vise at man ved brug af den komplekse eksponentialfunktion kan opskrive et alternativt udtryk for Fourierrækken, der undgår disse komplikationer. Vores "nye" Fourierrække udtrykker en funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ som en uendelig linearkombination af funktionerne $e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, hvor alle koefficienterne er givet ved én bestemt formel. Denne opskrivning vil vise sig at være særdeles bekvem når vi i afsnit 7.2 vil bruge Fourierrækker til at løse differentialligninger (husk at eksponentialfunktionerne spiller en helt speciel rolle i forbindelse med det stationære svar!).

Vi husker, at den komplekse eksponentialfunktion er defineret ved

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,\ \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Ved at erstatte variablen $\theta$ med $-\theta$ og addere/subtrahere de fremkomne ligninger, opnås følgende udtryk for cosinus-funktionen og sinus-funktionen:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{6.29}$$

**Lemma 6.20 (Afsnitssum af Fourierrække på kompleks form)** *Den $N'$te afsnitssum af Fourierrækken for en funktion $f$ kan skrives*

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx},$$

*hvor*

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.30}$$

**Bevis:** Lad os indsætte (6.29) i formlen for det $n$'te led, $n \neq 0$, i Fourierrækken for en funktion $f \in L^2(-\pi,\pi)$:

$$\begin{aligned}
a_n\cos nx + b_n\sin nx &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx\right)\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx\right)\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx\right)e^{inx} \\
&\quad +\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)dx\right)e^{-inx} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right)e^{inx} \\
&\quad +\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\right)e^{-inx}.
\end{aligned}$$

Med definition af $c_n$ som i (6.30) ses at det $n$'te led i Fourierrækken for $n \geq 1$ kan skrives

$$a_n\cos nx + b_n\sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}.$$

Endvidere ses at

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = c_0.$$

Derfor kan den $N$'te afsnitssum af Fourierrækken for $f$ skrives som

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

□

Afsnitssummen $S_N(x)$ er altså en linearkombination af funktionerne $e^{inx}$, $n = -N, -N+1, \ldots, N$. Udregningen leder til følgende definition.

**Definition 6.21 (Fourierrække på kompleks form)**
*Ved Fourierrækken for $f$ på kompleks form forstås*

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{6.31}$$

*hvor koefficienterne $c_n$ defineres ved* (6.30).

Matematisk set er der ikke sket nogen ændring ved at gå fra den sædvanlige form til kompleks form: enhver uendelig række, specielt altså en Fourierrække, er defineret via de endelige afsnitssummer – og som vi netop har set er afsnitssummerne for de to former for Fourierrækken identiske.

Bemærk, at vi kan udlede formler for hvordan man kommer fra Fourierrækken på reel form til Fourierrækken på kompleks form – og omvendt:

**Lemma 6.22 (Fra reel form til kompleks form og vice versa)**
*Lad $f$ være en $2\pi$-periodisk funktion, med Fourierkoefficienter $a_n$ og $b_n$ på reel form, og $c_n, n \in \mathbb{Z}$, på kompleks form. Så gælder følgende:*

*(i) Udtrykt ved koefficienterne $a_n$ og $b_n$ er $c_n$ bestemt ved*

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \ \textit{og for } n \in \mathbb{N}, \ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \tag{6.32}$$

*(ii) Alternativt kan $c_n$ skrives som*

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_0, & n = 0, \\ \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n = 1, 2, \ldots, \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & n = -1, -2, \ldots. \end{cases} \tag{6.33}$$

*(iii) Udtrykt ved koefficienterne $c_n$ er $a_n$ og $b_n$ bestemt ved*

$$a_0 = 2c_0, \ a_n = c_n + c_{-n}, \ b_n = i(c_n - c_{-n}), \ n \in \mathbb{N}. \tag{6.34}$$

**Bevis:** For at vise (i) tager vi udgangspunkt i (6.30),

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

For $n = 0$ følger det direkte at

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^0 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2}\,a_0.$$

For $n > 0$ fås ved at benytte at cosinus er lige og sinus ulige, at

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos(-nx) + i\sin(-nx)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2}(a_n - ib_n).
\end{aligned}$$

Beviset for tilfældet $n < 0$ er tilsvarende. Resultatet i (ii) er en omskrivning af (i), og (iii) følger ved at løse ligningerne i (i) med hensyn til $a_n$ og $b_n$. □

Når funktionen $f$ kun antager reelle værdier er der en nyttig sammenhæng mellem Fourierkoefficienterne $c_n$ og $c_{-n}$:

**Lemma 6.23 (Fourierkoefficienter for reelle funktioner)**
*Antag at funktionen $f \in L^2(-\pi, \pi)$ kun antager reelle værdier. Så er*

$$c_{-n} = \overline{c_n},\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

**Bevis:** Pr. antagelse er $f(x) = \overline{f(x)}$ for alle $x$. Ved direkte udregning fås derfor at

$$\begin{aligned}
c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{-inx}}dx \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx} \\
&= \overline{c_n}.
\end{aligned}$$

□

Lad os bestemme Fourierrækken på kompleks form for firkantfunktionen:

**Eksempel 6.24** For firkantfunktionen i eksempel 6.5,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x \in ]-\pi, 0[, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ 1 & \text{hvis } x \in ]0, \pi[, \\ 0 & \text{hvis } x = \pi \end{cases} \tag{6.35}$$

så vi at Fourierkoefficienterne er

$$a_n = 0 \text{ for alle } n, \text{ og } b_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ er lige,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{hvis } n \text{ er ulige.} \end{cases} \tag{6.36}$$

Det følger nu umiddelbart af (6.32) at

$$c_n = 0 \text{ for } n \text{ lige.}$$

For ulige værdier af $n$ deles op for positive og negative $n$: for $n = 1, 3, \ldots,$ er

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) = \frac{1}{2}(0 - i\frac{4}{n\pi}) = \frac{-2i}{n\pi},$$

og for $n = -1, -3, \ldots$ er

$$c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) = \frac{1}{2}(0 + i\frac{4}{-n\pi}) = \frac{-2i}{n\pi}.$$

I dette tilfælde fås altså det samme funktionsudtryk for positive og negative $n$, så resultatet kan sammenfattes til

$$c_n = \begin{cases} 0, & n \text{ lige,} \\ -\frac{2i}{\pi n}, & n \text{ ulige.} \end{cases}$$

På kompleks form er Fourierrækken således

$$f \sim -\frac{2i}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \text{ ulige}} \frac{1}{n} e^{inx}.$$

□

Bemærk til slut, at når man taler om Fourierrækken på reel form kontra kompleks form, så er der udelukkende tale om hvorvidt man skriver Fourierrækken i termer af cosinus/sinus-funktioner eller komplekse eksponentialfunktioner. Det har altså ikke noget at gøre med om koefficienterne $a_n$ og $b_n$ er reelle eller komplekse: det kan sagtens forekomme at koefficienterne $a_n$ og $b_n$ i Fourierrækken på reel form antager komplekse værdier – se f.eks. opgave 210.

## 6.4 Parsevals sætning

Fourierrækker skal betragtes som et redskab til at approksimere komplicerede periodiske funktioner via trigonometriske funktioner. Vi præsenterer nu et af de vigtigste resultater, nemlig *Parsevals sætning.* Vi vil senere benytte dette resultat i forbindelse med beregning af hvor mange led man skal medtage i afsnitssummen for at opnå en god approksimation, specielt i forbindelse med anvendelser af Fourierrækker til løsning af differentialligninger. I indeværende afsnit nøjes vi med at vise hvorledes sætningen kan benyttes til at beregne visse uendelige summer.

**Sætning 6.25 (Parsevals sætning)** *Antag at funktionen* $f \in L^2(-\pi, \pi)$ *har Fourierkoefficienterne* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, *eller, på kompleks form,* $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. *Så er*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

Som nævnt kan summen af visse uendelige rækker beregnes ved hjælp af Parsevals sætning:

**Eksempel 6.26**
(i) Fourierkoefficienterne for funktionen i (6.35),

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x \in ]-\pi, 0[, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ 1 & \text{hvis } x \in ]0, \pi[, \\ 0 & \text{hvis } x = \pi, \end{cases}$$

er i (6.36) angivet som

$$a_n = 0 \text{ for alle } n, \text{ og } b_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ er lige,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{hvis } n \text{ er ulige.} \end{cases}$$

Ved direkte beregning ses at

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}dx = 2\pi,$$

og

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\{1,3,5,\cdots\}}(\frac{4}{n\pi})^2 &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\in\{1,3,5,\cdots\}}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

Via Parsevals sætning kan vi nu slutte at

$$\frac{1}{2\pi}\,2\pi = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

dvs. at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Dette resultat kan også udledes ved at anvende Fouriers sætning på funktionen $f(x) = |x|,\ x \in [-\pi, \pi[$, se opgave 227.

(ii) Fourierkoefficienterne for funktionen

$$f(x) = x,\ x \in [-\pi, \pi[$$

er angivet i eksempel 6.7. Ved udregning ses at

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}. \tag{6.37}$$

Via Parsevals sætning slutter vi nu at

$$\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Altså er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{6.38}$$

Dette result er meget overraskende: tænk på at tallet $\pi$ er indført som forholdet mellem omkredsen og diameteren i en cirkel - det er ikke klart hvad det har at gøre med rækken i (6.38)! Resultatet i (6.38) har været kendt længe, men først i 1950'erne blev der givet en forklaring på sammenhængen med tallet $\pi$, af den østrigske matematiker Hlawka. □

## 6.5 Fourierrækker og Hilbertrum

Formålet med dette afsnit er at vise, at der er en tæt forbindelse mellem teorien for Fourierrækker og teorien for vektorrum med indre produkt.

Lad os indledningsvis betragte et endelig-dimensionalt vektorrum $V$, udstyret med et indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Hvis vektorrummet er komplekst vil vi vælge det indre produkt lineært i den første indgang: det betyder, at der for vilkårlige $f, g \in V$ og $a \in \mathbb{C}$ gælder at

$$\langle af, g\rangle = a\langle f, g\rangle, \quad \langle f, ag\rangle = \overline{a}\langle f, g\rangle.$$

Vi husker, at en familie af vektorer $\{e_k\}_{k=1}^n$ i $V$ kaldes en *ortonormalbasis* for $V$ hvis følgende to betingelser er opfyldt:

(i) vektorerne $\{e_k\}_{k=1}^n$ udspænder $V$, dvs.

$$\text{span}\{e_k\}_{k=1}^n = V;$$

(ii)

$$\langle e_k, e_j\rangle = \begin{cases} 1 \text{ hvis } k = j, \\ 0 \text{ hvis } k \neq j. \end{cases}$$

Hvis $\{e_k\}_{k=1}^n$ er en ortonormalbasis for $V$, så kan alle vektorer $f \in V$ skrives på formen

$$f = \sum_{k=1}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k. \tag{6.39}$$

En stor del af teorien for endelig-dimensionale vektorrum kan udvides til en klasse af uendelig-dimensionale vektorrum, der kaldes *Hilbertrum.* Et Hilbertrum $\mathcal{H}$ defineres på samme måde som et vektorrum med et indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (og tilhørende norm $|| \cdot || = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$): vi vil se at man blot tilføjer en ekstra betingelse som sikrer at de vigtigste resultater fra de endelig-dimensionale vektorrum også gælder i det uendelig-dimensionale tilfælde.

Før vi præsenterer den formelle definition af et Hilbertrum, nævner vi, at begrebet "konvergens af en følge af tal" har en analog version i et vilkårligt vektorrum $V$ der er udstyret med en norm $|| \cdot ||$: man siger at en følge af vektorer $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V$ konvergerer mod $x \in V$ hvis

$$||x - x_k|| \to 0 \text{ for } k \to \infty.$$

I analogi med følger i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ siges en følge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ af vektorer i $V$ at være en *Cauchyfølge* hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ således at

$$||x_k - x_\ell|| \leq \epsilon \text{ når } k, \ell \geq N. \tag{6.40}$$

I de velkendte tilfælde, hvor vektorrummet $V$ er enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, vides, at en følge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ er konvergent hvis og kun hvis den er en Cauchyfølge; vi kan altså benytte betingelsen (6.40) til at verificere om $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ er konvergent eller ej, *uden* at involvere en eventuel grænseværdi $x$.

På dette punkt er der en afgørende forskel mellem endelig-dimensionale og uendelig-dimensionale vektorrum: i mange uendelig-dimensionale vektorrum findes der Cauchyfølger, der ikke er konvergente. Det er her Hilbertrummene kommer ind: Hilbertrummene defineres ved at kræve at alle Cauchyfølger er konvergente.

**Definition 6.27 (Hilbertrum)** *Et Hilbertrum er et vektorrum som er udstyret med et indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, med den ekstra egenskab at enhver Cauchyfølge i $\mathcal{H}$ er konvergent.*

Ethvert endelig-dimensionalt vektorrum med indre produkt er et Hilbertrum; man kan altså opfatte Hilbertrummene som en naturlig udvidelse af de endelig-dimensionale vektorrum der optræder i lineær algebra. Mange resultater fra lineær algebra holder også i Hilbertrum – dog kræver formuleringen heraf ekstra omhu på grund af de "uendelig mange dimensioner"; meningen hermed vil blive klar i dette afsnit.

Begrebet "ortonormalbasis" har en analog udgave i Hilbertrum: én blandt mange formuleringer er, at en familie $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ af elementer i $\mathcal{H}$ er en ortonormalbasis for $\mathcal{H}$ hvis

$$||f||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2, \ \forall f \in \mathcal{H} \ \text{ og } \ \langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{hvis } k = j, \\ 0 & \text{hvis } k \neq j. \end{cases} \tag{6.41}$$

Bemærk, at en ortonormalbasis nu er en *uendelig følge* af elementer i $\mathcal{H}$; en endelig familie af vektorer kan jo højst udspænde et endelig-dimensionalt vektorrum.

Man kan vise, at hvis $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ er en ortonormalbasis for $\mathcal{H}$, så kan ethvert $f \in \mathcal{H}$ skrives på formen

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k. \tag{6.42}$$

Vi bemærker at (6.42) rent optisk ligner (6.39); dog er der tale om en uendelig sum. Da vektorerne $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ikke er tal, men derimod elementer i et vektorrum, må vi nødvendigvis skulle redegøre nærmere for hvad den uendelige sum i (6.42) betyder. Vores definition svarer nøje til definitionen af summen af en uendelig række af tal: (6.42) betyder, at forskellen mellem $f$ og den $N$'te afsnitssum af rækken i (6.42), målt i normen $|| \cdot ||$ hørende til Hilbertrummet, går mod 0 for $N \to \infty$, dvs. at

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k \right\| \to 0 \text{ for } N \to \infty. \tag{6.43}$$

Vi er nu klar til at forbinde teorien for Hilbertrum med Fourierrækkerne. Sammenhængen bygger på, at vektorrummet $L^2(-\pi, \pi)$ bliver et Hilbertrum hvis (strengt taget skal man først identificere funktioner der er ens næsten overalt, se [11] for en præcis beskrivelse heraf) det udstyres med det indre produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx, \;\; f, g \in L^2(-\pi, \pi). \tag{6.44}$$

Man kan endvidere vise at funktionerne

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \bigcup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right\}_{n=1}^{\infty} \bigcup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}_{n=1}^{\infty} \tag{6.45}$$

udgør en ortonormalbasis for $L^2(-\pi, \pi)$. Ved at anvende (6.42) på denne ortonormalbasis fås at ethvert $f \in L^2(-\pi, \pi)$ kan skrives

$$f = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \tag{6.46}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx. \tag{6.47}$$

Beregning af koefficienterne i denne rækkeudvikling leder til

$$f = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{6.48}$$

hvor tallene $a_n, b_n$ netop er Fourierkoefficienterne. Dette er *præcis* det udtryk vi brugte som definition af Fourierrækken! Vi konkluderer at Fourierrækken for en funktion $f$ netop er rækkefremstillingen af $f$ i termer af ortornomalbasen i (6.45). Denne sammenhæng forklarer de problemer vi

har haft med punktvis konvergens af Fourierrækker: den præcise betydning af (6.48) er ifølge (6.43), at

$$\left\| f - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right\| \to 0 \text{ for } N \to \infty,$$

dvs. at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right|^2 dx \to 0 \text{ for } N \to \infty; \quad (6.49)$$

denne betingelse er *ikke* det samme som at kræve at Fourierrækken konvergerer punktvis mod $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Umiddelbart kan man undre sig over, at Fourierrækker er defineret på en måde så konvergensbegrebet skal fortolkes som i (6.49). Vi vil forklare dette i to skridt. For det første er det ikke tilfredsstillende blot at bruge punktvis konvergens som konvergensbegreb. Thi selv hvis en rækkefremstilling konvergerer mod $f(x)$ for alle $x$ i et givet interval, er det ikke sikkert at der findes en afsnitssum, der approksimerer $f$ godt over *hele* intervallet; se diskussionen i afsnit 5.4. Vi har altså brug for et konvergensbegreb, der tager hensyn til alle $x \in [-\pi, \pi]$ på én gang.

Med dette i tankerne kunne man definere konvergensbegrebet ved at kræve at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| dx \to 0 \text{ for } N \to \infty; \quad (6.50)$$

denne betingelse involverer alle $x$ i intervallet $[-\pi, \pi]$. Betingelsen har endvidere den umiddelbare geometriske fortolkning, at arealet begrænset af graferne for funktionen $f$, afsnitssummen $S_N$, og linierne $x = \pm\pi$, går mod 0 for $N \to \infty$. Vi bemærker at betingelsen (6.50) ligner betingelsen (6.49): forskellen er, at i (6.49) er integranden kvadreret. Herved "ødelægges" den umiddelbare geometriske fortolkning af betingelsen; men man opnår, at konvergensbegrebet nu stemmer overens med konvergensbegrebet i Hilbertrummet $L^2(-\pi, \pi)$. En læser med kendskab til Hilbertrum vil forstå betydningen heraf: Hilbertrumsstrukturen betyder at vi har et indre produkt til rådighed, og heraf følger f.eks. at adskillige vigtige minimeringsproblemer har éntydige løsninger. For en nærmere beskrivelse henvises til f.eks. [11].

I en vis forstand kan man endda sige, at den geometriske fortolkning i (6.50) er bevaret med vores definition i (6.49): man kan vise, at hvis (6.49) er opfyldt, så gælder (6.50) også, se f.eks. Theorem 1.38 i [15].

For Fourierrækken på kompleks form gælder overvejelser, der helt svarer til vores beskrivelse af Fourierrækken på reel form. Specielt haves:

**Sætning 6.28 (Orthonormalbasis for $L^2(-\pi, \pi)$)** *De komplekse eksponentialfunktioner $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ udgør en ortonormalbasis for $L^2(-\pi, \pi)$.*

Bemærk også at som en konsekvens af Parsevals sætning gælder at hvis $f \in L^2(-\pi, \pi)$ har Fourierkoefficienterne $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, , så er

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty. \tag{6.51}$$

Man kan vise at det omvendte også gælder: hvis (6.51) er opfyldt, så vil

$$f(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

definere en funktion i $L^2(-\pi, \pi)$. Vi har altså en bijektiv korrespondance mellem funktionerne i $L^2(-\pi, \pi)$ og følger af tal $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ der opfylder (6.51). Vi skal ikke gå ind i en teoretisk redegørelse af betydningen heraf, men blot henvise til standardbøger om Hilbertrum og harmonisk analyse (se f.eks. [2] som bruges i *01325 Matematik 4,* og [11]).

Som en sidste bemærkning noterer vi, at (6.39) og (6.42) forbinder lineær algebra med vores beskrivelse af signaltransmission i eksempel 5.39: udtrykket (6.39) viser at vektoren $f \in V$ er éntydigt bestemt af tallene $\{\langle f, e_k\rangle\}_{k=1}^{n}$. Altså kan information om vektoren $f$ transmitteres ved at man simpelthen sender denne følge af tal.

Hilbertrum er en vigtig begrebsramme, der fortjener en meget dybere behandling end vi har givet her. Vi henviser til kurserne 01330 *Matematik 3* (der benytter bogen [8]), 01325 *Matematik 4* (der benytter bogen [2]), og 01715 *Funktionalanalyse* (der benytter bogen [6]).

## 6.6 Fouriertransformationen

Som vi har set er Fourierrækker et nyttigt redskab i forbindelse med approksimation af periodiske funktioner. For ikke-periodiske funktioner må man gribe til andre metoder. Et klassisk redskab er Fouriertransformationen, som studeres i dette afsnit; et andet, og nyere, er wavelets, som er emnet for afsnit 6.7.

I beskrivelsen af Fouriertransformationen vil vi betragte funktioner i vektorrummet

$$L^1(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

For funktioner $f \in L^1(\mathbb{R})$ defineres *Fouriertransformationen* ved

$$\hat{f}(\gamma) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\gamma} dx, \ \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ofte er det bekvemt at benytte skriveformen

$$(\mathcal{F}f)(\gamma) = \hat{f}(\gamma);$$

den indikerer at man kan betragte Fouriertransformationen som en lineær afbildning, som sender (afbilder) funktionen $f$ over i funktionen $\hat{f}$. For $f \in L^1(\mathbb{R})$ kan man vise at $\hat{f}$ er en kontinuert funktion, og at

$$\hat{f}(\gamma) \to 0 \text{ for } \gamma \to \pm\infty.$$

Fouriertransformationen af en funktion $f$ giver faktisk information om frekvensindholdet i $f$: i eksempel 6.30 viser vi, at Fouriertransformationen af en funktion der oscillerer som en cosinus-funktion med frekvens $\nu$ på et begrænset interval, faktisk har et peak ved frekvensen $\gamma = \nu$. Fouriertransformationen er altså i stand til at registrere at signalet indeholder en svingning med denne frekvens. Vi vil udlede dette resultat som en konsekvens af en række regneregler, som præsenteres i sætning 6.29.

**Sætning 6.29 (Regneregler for Fouriertransformationen)**
*For $f \in L^1(\mathbb{R})$ gælder følgende regneregler:*

*(i) Hvis $f$ er en lige funktion, så er*

$$\hat{f}(\gamma) = 2\int_0^\infty f(x)\cos(2\pi x\gamma)dx.$$

*(ii) Hvis $f$ er en ulige funktion, så er*

$$\hat{f}(\gamma) = -2i\int_0^\infty f(x)\sin(2\pi x\gamma)dx.$$

*(iii) Translationsoperatoren $T_a$ defineres, for et givet $a \in \mathbb{R}$, ved $(T_a f)(x) = f(x-a)$. Fouriertransformationen af funktionen $T_a f$ er givet ved*

$$(\mathcal{F}T_a f)(\gamma) = \hat{f}(\gamma)e^{-2\pi i a\gamma}.$$

*(iv) Lad $\theta \in \mathbb{R}$. Fouriertransformationen af funktionen $g(x) = f(x)e^{2\pi i\theta x}$ er givet ved*

$$(\mathcal{F}g)(\gamma) = \hat{f}(\gamma - \theta).$$

*(v) Hvis $f$ er differentiabel og $f' \in L^1(\mathbb{R})$, så er*

$$(\mathcal{F}f')(\gamma) = 2\pi i\gamma\hat{f}(\gamma).$$

Sætning 6.29 bevises i stort set alle lærebøger om Fourieranalyse og signalanalyse, se f.eks. [10]. Bemærk specielt reglerne (iii) og (iv): formuleret i ord siger de, at

- man beregner Fouriertransformationen af en translateret udgave af funktionen $f$ ved at gange $\hat{f}$ med en kompleks eksponentialfunktion;
- man beregner Fouriertransformationen af et produkt af en funktion $f$ og en kompleks eksponentialfunktion ved at translatere $\hat{f}$.

Lad os nu benytte disse regler til at beregne Fouriertransformationen af en funktion, der opfører sig som en cosinus-funktion på et interval. Til det formål defineres den *karakteristiske funktion* hørende til et interval $I \subset \mathbb{R}$ ved

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in I, \\ 0 & \text{hvis } x \notin I. \end{cases}$$

**Eksempel 6.30** For givne konstanter $a, \omega > 0$ ønsker vi at beregne Fouriertransformationen af funktionen

$$f(x) = \cos(2\pi\omega x)\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x). \tag{6.52}$$

Dette signal beskriver en svingning, der starter til tidspunktet $x = -a/2$ og fortsætter til $x = a/2$. Hvis $x$ måles i sekunder, så har vi $\omega$ svingninger pr. sekund; frekvensen er således $\nu = \omega$. For at finde Fouriertransformationen betragter vi først funktionen $\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}$: da denne funktion er lige, viser sætning 6.29(i) at for $\gamma \neq 0$ er

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(\gamma) &= 2\int_0^\infty \chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x)\cos(2\pi x\gamma)dx \\ &= 2\int_0^{\frac{a}{2}} \cos(2\pi x\gamma)dx \\ &= \left[\frac{2}{2\pi\gamma}\sin(2\pi x\gamma)\right]_{x=0}^{x=\frac{a}{2}} \\ &= \frac{\sin \pi a\gamma}{\pi\gamma}. \end{aligned}$$

Lad os nu vende tilbage til funktionen $f$. Ved brug af (6.29) ses at

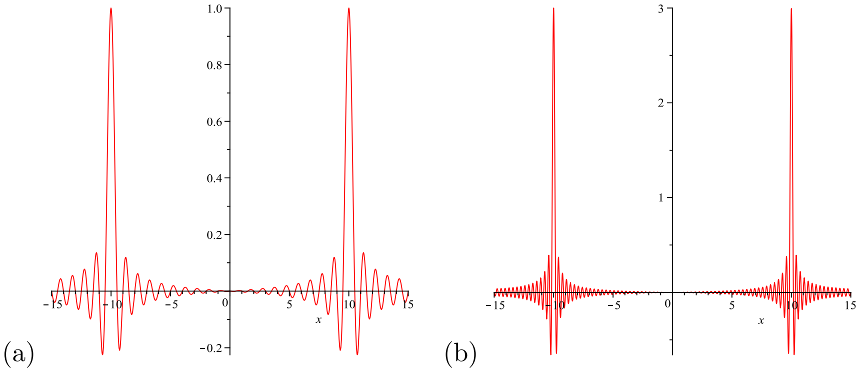
$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2\pi i\omega x}\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x) + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\omega x}\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x).$$

Via sætning 6.29(iv) følger det nu at

$$\begin{aligned} \hat{f}(\gamma) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(\gamma-\omega) + \frac{1}{2}\mathcal{F}\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(\gamma+\omega) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \pi a(\gamma-\omega)}{\pi(\gamma-\omega)} + \frac{\sin \pi a(\gamma+\omega)}{\pi(\gamma+\omega)}\right). \end{aligned}$$

Figur 6.31 viser $\hat{f}$ for $\omega = 10$ og forskellige værdier for $a$ i (6.52). En større værdi for $a$ svarer til at svingningen $\cos(2\pi\omega x)$ med frekvens $\nu = \omega$ optræder i signalet over et længere tidsrum: vi ser at dette forstørrer peaket af $\hat{f}$ ved frekvensen $\gamma = \nu = 10$. □

En anden vigtig egenskab ved Fouriertransformationen er, at den er invertibel: hvis vi kender Fouriertransformationen $\hat{f}$ af en (i princippet)




**Figur 6.31** *(a): Fouriertransformationen af funktionen $f$ i* (6.52) *for* $\omega = 10, a = 2$*; funktionen $f$ beskriver en svingning med frekvens* $\nu = 10$*, der er til stede i et tidsrum af længde* 2*. (b):Fouriertransformationen af funktionen $f$ i* (6.52) *for* $\omega = 10, a = 6$*; funktionen $f$ beskriver en svingning med frekvens* $\nu = 10$*, der er til stede i et tidsrum af længde* 6*.*

ukendt funktion, så er vi i stand til at bestemme funktionen $f$ ved brug af formlen

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i x \gamma} d\gamma. \tag{6.53}$$

En matematisk korrekt formulering heraf vil kræve lidt mere omhu, se f.eks. [15]. Man kan vise, at formlen ihvertfald holder hvis man ved at $f$ er en kontinuert funktion i $L^1(\mathbb{R})$ som går mod 0 når $x \to \pm\infty$.

Vi nævner uden bevis, at Fouriertransformationen kan defineres for funktioner hørende til andre funktionsrum end $L^1(\mathbb{R})$. I waveletanalyse er det f.eks. vigtigt at Fouriertransformationen definerer en bijektiv afbildning af Hilbertrummet $L^2(\mathbb{R})$, defineret i (6.55), på sig selv.

## 6.7 Wavelets

I afsnit 5.3 definerede vi helt generelt hvorledes man danner en sumfunktion $f$ på basis af en familie af givne funktioner $f_0, f_1, f_2, \dots$ med samme definitionsmængde. Sumfunktioner kommer imidlertid ofte ind i billedet på en helt anden måde: man har givet en funktion $f$, og ønsker at *finde* funktioner $f_0, f_1, f_2, \dots$ således at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x). \tag{6.54}$$

Motivationen herfor kommer igen fra approksimationsteorien: funktionen $f$ er måske besværlig at arbejde med, og man håber at finde funktioner

$f_0, f_1, f_2, \ldots$ således at de endelige afsnitssummer i (6.54) approksimerer $f$ godt, altså således at

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$$

for en passende værdi af $N$. Endvidere ønskes at de endelige afsnitssummer er bekvemme at arbejde med, hvilket i praksis betyder at funktionerne $f_0, f_1, \ldots$ skal have en simpel og bekvem struktur. Både potensrækkefremstillinger og Fourierrækker er dybest set indført af denne årsag; begge har imidlertid den ulempe at de kan anvendes for ret begrænsede klasser af funktioner.

I dette afsnit vil vi indføre et matematisk redskab, kaldet wavelets, der leder til en bred vifte af muligheder for repræsentationer af typen (6.54) for en stor klasse af funktioner $f$. Waveletteorien er ganske ny (den går tilbage til ca. 1982), men som vi skal se har den allerede vist sig nyttig i mange sammenhænge. Teknisk set er emnet for vanskeligt til at vi kan gå i dybden, men vi vil forsøge at redegøre for de basale ideer med udgangspunkt i den viden vi har samlet i bogens første kapitler.

I Fourierrækketeorien har vi fremstillet periodiske funktioner ved hjælp af cosinusfunktioner og sinusfunktioner. For ikke–periodiske funktioner må man benytte andre typer fremstillinger. Vi skal i dette afsnit betragte funktioner i Hilbertrummet

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}. \tag{6.55}$$

Vi ønsker at repræsentere sådanne funktioner $f$ ved hjælp af en ny type rækkefremstilling, som vi ikke er stødt på tidligere. For at forklare dette nærmere betragter vi først en funktion $\psi$, som f.eks. kunne se ud som vist på figur 6.32. Til $\psi$ knytter vi nu en familie af funktioner $\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}$, der defineres ved

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

For at forstå disse funktioneners sammenhæng med den givne funktion $\psi$ vil vi begynde med at se på tilfældet $j = 0$. Først bemærkes at

$$\psi_{0,0}(x) = 2^0\psi(2^0 x - 0) = \psi(x);$$

funktionen $\psi_{0,0}$ er altså funktionen $\psi$ selv. Endvidere er

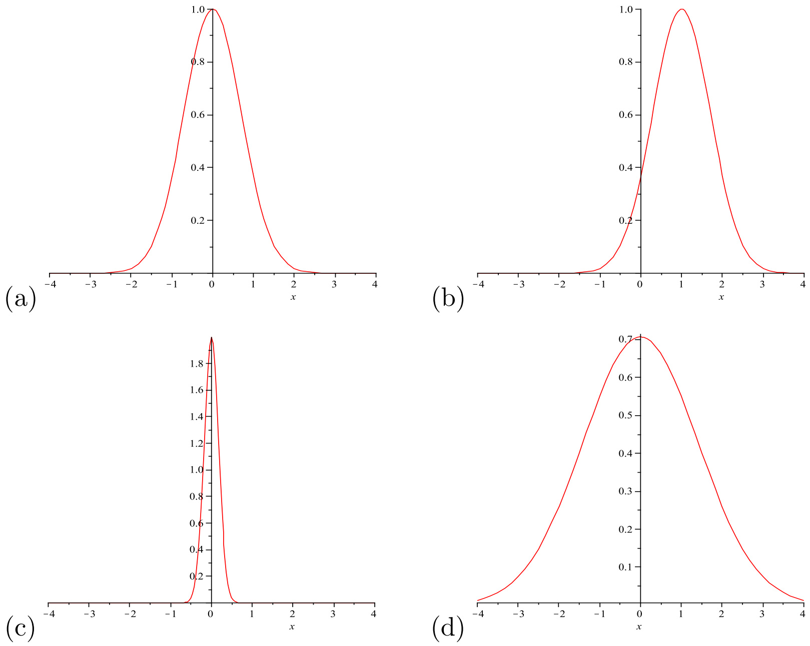
$$\psi_{0,k}(x) = 2^0\psi(2^0 x - k) = \psi(x - k)$$

Det ses altså at grafen for funktionen $\psi_{0,k}$ fremkommer ved at forskyde grafen for $\psi$ med $k$ enheder til højre. Se figur 6.32.

For at forstå parameteren $j$ sætter vi nu $k = 0$. Så er

$$\psi_{j,0}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x).$$

af $j$ får “udstrakte” udgaver af $\psi$.




**Figur 6.32** *(a):* $\psi(x) = e^{-x^2} = \psi_{0,0}(x)$; *(b):* $\psi_{0,1}(x) = \psi(x-1) = e^{-(x-1)^2}$ *(c):* $\psi_{2,0}(x) = 2\psi(2^2x) = 2e^{-16x^2}$; *(d):* $\psi_{-1,0}(x) = 2^{-1/2}\psi(2^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x^2/4}$.

Som det ses på figur 6.32 er funktionerne $\psi_{j,0}$ skalerede udgaver af $\psi$: når $j$ er stor er grafen “presset sammen”, mens vi for store negative værdier

Sammenfattende kan vi nu sige at funktionerne $\psi_{j,k}$ er skalerede og translaterede udgaver af $\psi$. Funktionerne $\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}$, siges at udgøre *waveletsystemet* hørende til funktionen $\psi$.

Problemet er nu følgende. Vi ønsker at bestemme funktionen $\psi$ således at *enhver* funktion $f$ der opfylder (6.55) kan fremstilles ved hjælp af en uendelig række på formen

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(x), \tag{6.56}$$

hvor

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{j,k}(x)dx. \tag{6.57}$$

En funktion $\psi$ der tilfredsstiller dette kaldes en *wavelet*. Situationen er på mange måder analog til hvad vi oplevede for potensrækker og for Fourierrækker. I disse tilfælde var målet at repræsentere den givne funktion som en uendelig sum af henholdsvis potensfunktioner og trigonometriske funk-

tioner: nu ønsker vi at fremstille $f$ som en sum af translaterede og skalerede udgaver af en fast funktion $\psi$. Da vi har to operationer inde i billedet bliver $f$ repræsenteret v.h.a. en dobbeltsum i (6.56).

Som allerede nævnt er computerbaserede beregningsmetoder i forbindelse med rækkefremstillinger altid baserede på endelige afsnitssummer. Den eksakte fremstilling (6.56) må altså erstattes af

$$f(x) \sim \sum_{j=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} c_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

for en passende stor værdi af $N$. En af fordelene ved wavelets (sammenlignet med andre typer repræsentationer) er at man ofte kan opnå en fin tilnærmelse til $f$ ved brug af et ret begrænset antal funktioner $\psi_{j,k}$, altså for ret små værdier af $N$. Som vi har set i afsnit 5.4 er det afgørende at finde endelige afsnitssummer der approksimerer godt, simultant for alle $x$ i det betragtede interval, og jo færre funktioner der skal bruges, jo nemmere bliver fremstillingen at bruge.

Det første eksempel på en funktion $\psi$ der opfylder (6.56) blev givet af Haar i 1910:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}[; \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1[; \\ 0, & x \notin [0, 1[. \end{cases} \tag{6.58}$$

Denne funktion er ikke altid bekvem at arbejde med. For eksempel er den ikke kontinuert i $x = 0,\ x = \frac{1}{2}$ og $x = 1$. Dette er et problem i forbindelse med f.eks. signaltransmission. Vi husker fra beskrivelsen i eksempel 5.39 at hvis vi ønsker at bruge fremstillingen (6.56) til signaltransmission, så vil afsenderen A ikke kunne sende de uendelig mange tal $c_{j,k}$, men kun et endeligt antal, f.eks. $\{c_{j,k}\}_{j,k=-N}^{N}$ for en passende stor værdi af $N$. Endvidere kan afrundinger forekomme, så modtageren M vil i praksis modtage et signal af formen

$$f \sim \sum_{j=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} \tilde{c}_{j,k}\psi_{j,k}. \tag{6.59}$$

Selv hvis den afsendte funktion $f$ er kontinuert vil modtageren altså få et ikke-kontinuert signal! Det er klart at dette vil have en negativ effekt hvis man ønsker at transmittere et billede med glatte kurver: et billede af en elefant vil for modtageren se ud som om det er sammensat af små kasser hvis transmissionen er baseret på funktionen (6.58).

Der skulle gå mere end 70 år før den næste wavelet blev konstrueret af Strömberg i 1982. Fra ca. 1985 har der været en intens forskningsaktivitetet, med det formål at finde wavelets med optimale egenskaber (i forhold til konkrete anvendelseskriterier). Som et kuriøst eksempel på hvorledes

forskning foregår nævner vi, at undersøgelserne blev indledt af en franskmand, Yves Meyer, der var sikker på at der *ikke* fandtes en wavelet $\psi$ der er uendeligt ofte differentiabel og samtidig tilfredsstiller en anden vigtig betingelse (løst sagt at den er tæt på nul udenfor et begrænset interval og aftager hurtigt). Han satte sig for at bevise sin påstand, men undervejs fandt han ud af at han havde taget fejl. Enden på historien blev at han faktisk fandt en wavelet med de egenskaber han ikke troede var mulige; den kaldes i dag for *Meyers wavelet.*

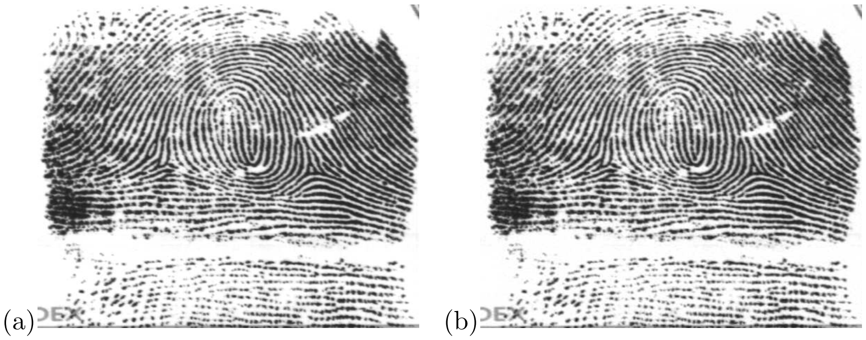
De første waveletkonstruktioner blev næsten betragtet som små mirakler, og man troede i lang tid at sådanne konstruktioner var så specielle at mulighederne for at lave dem var små. Dette viste sig i slutningen af firserne at være forkert: sammen med Stephane Mallat, en ung ingeniør, lykkedes det omkring 1987 for Yves Meyer at opstille nogle generelle retningslinier for hvorledes sådanne konstruktioner kan udføres. Resultatet blev et matematisk redskab, der lige siden har været hyppigt brugt i ingeniørmæssige sammenhænge. Teorien tog et stort spring fremad omkring 1990, hvor det lykkedes Ingrid Daubechies at finde nogle wavelets med specielt nyttige egenskaber. Kort fortalt handler det om at man i f.eks. computerbaserede anvendelser ikke kan arbejde med funktioner på ubegrænset store intervaller; det lykkedes for Daubechies at finde wavelets $\psi$ med gode approksimationsegenskaber, og således at $\psi(x) = 0$ udenfor intervaller af formen $[0, 2N-1]$ for passende valgte $N \in \mathbb{N}$.

Waveletmetoden er bl.a. blevet benyttet af FBI (Federal Bureau for Investigation) i USA til at lagre fingeraftryk.

**Eksempel 6.33** FBI's fingeraftryk var i mange år gemt på papirform i et topsikret arkiv i Washington, på et areal svarende til en fodboldbane. Hvis man havde brug for at sammenligne et fingeraftryk i San Francisco med emner i arkivet måtte man altså sende fingeraftrykkene. Endvidere foregik sammenligningen af fingeraftryk manuelt, så alt i alt var der tale om en ret langsommelig proces. Blandt andet af disse grunde ønskede FBI for nogle år siden at omstille arkivet på elektronisk form: herved ville det blive lettere at sende informationer, og der ville være mulighed for at lade computere gennemsøge arkivet for at finde fingeraftryk der lignede et forelagt emne.

Et fingeraftryk kan betragtes som et lille billede, så en naturlig idé er at dele hver $cm^2$ op i f.eks. $256^2$ små kvadrater, såkaldte *pixels*, der hver tildeles en gråtone på en skala fra f.eks. 0 (helt hvid) til 256 (helt sort). Herved bliver informationen i billedet med god tilnærmelse omsat til en række tal, nemlig rækken af tal der fortæller hvilke gråtoner der er tildelt hvilke felter. Denne følge af tal kan uden problemer lagres og sendes elektronisk. Informationen kan altså hurtigt sendes fra San Francisco til Washington og sammenlignes med fingeraftrykkene i arkivet.

Imidlertid er der et problem med ovenstående, der har af gøre med arkivets størrelse. Med en fornuftig detaljeringsgrad vil hvert fingeraftryk med ovenstående metode blive omformet til elektroniske informationer der




**Figur 6.34** *(a): Originalt fingeraftryk. (b): Fingeraftryk komprimeret v.h.a. wavelets og rekonstrueret.*

fylder ca. 13Mb. FBI har over 30 millioner sæt fingeraftryk i arkivet (á ti fingre), og modtager 30.000 nye fingeraftryk hver dag. Her opstår problemet, da der er tale om større mængder data end nogen computer kan lagre. Der er således behov for en måde at repræsentere informationerne på ved brug af færre data. Dette skal gøres så de væsentlige informationer i fingeraftrykkene bliver bevaret.

Her kommer wavelets ind i billedet. FBI begyndte at undersøge hvorledes man på den mest effektive måde kunne komprimere data. Man havde i nogen tid vidst, at wavelets er gode til at repræsentere mange typer signaler ved hjælp af få koefficienter, og enden på historien blev faktisk at FBI besluttede sig til at bruge wavelets til formålet. I den konkrete situation viste det sig at man ved at repræsentere et fingeraftryk ved hjælp af wavelets kan nøjes med at gemme 8 procent af informationerne, så et fingeraftryk fylder nu ca. 1Mb i stedet for 13 Mb. Se figur 6.34, der viser henholdvis et originalt fingeraftryk og den komprimerede udgave. □

En matematisk beskrivelse af wavelets kræver en mere dybdegående analyse end vi kan give her. Wavelets indgår i kurset 01325 *Matematik 4,* hvor lærebogen er [2].

# Kapitel 7

## Differentialligninger og uendelige rækker

I kapitel 1 og kapitel 2 studerede vi differentialligninger og systemer heraf, ved brug af metoder som kendes fra MAT 1. Vi skal nu tage mere avancerede redskaber i brug, og vise hvorledes teorien for uendelige rækker leder til vigtige resultater. Specielt vil vi i afsnit 7.1 og afsnit 7.2 benytte vores viden om potensrækker og Fourierrækker til at løse differentialligninger.

### 7.1 Potensrækkemetoden

I kapitel 1 beskæftigede vi os med differentialligninger af $n$'te orden. Vi betragtede udelukkende ligninger med konstante koefficienter, af den simple grund, at der for mere generelle ligninger ikke findes nogen generel løsningsformel for den homogene differentialligning. Således kan man for eksempel ikke finde nogen generel formel til løsning af en lineær differentialligning af n'te orden på formen

$$a_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + a_n(t)y = 0,\ t \in I, \tag{7.1}$$

hvor $n \geq 2$, og koefficienterne er funktioner. Specielt må man ikke tro, at man kan benytte karakterligningen, som alene er forbeholdt ligninger med konstante koefficienter.

Hvis funktionerne $a_0(t), \ldots, a_n(t)$ i (7.1) alle er polynomier eller potensrækker, kan man imidlertid ofte finde løsninger til (7.1) på

potensrækkeform

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \tag{7.2}$$

Fremgangsmåden ved bestemmelse af sådanne løsninger består kort sagt deri, at man i venstre side af (7.1) indsætter en ubekendt række på denne form, foretager differentiation og multiplikation med $a_i(t)$, og dernæst samler hele venstre side til en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Hvis den oprindelige række (7.2) skal være løsning til (7.1), skal der derfor gælde at

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = 0$$

for alle $t$. Ifølge identitetssætningen for potensrækker (korollar 5.21) implicerer dette at $b_n = 0$ for alle $n$; man må derfor søge at bestemme koefficienterne $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ i (7.2) således, at dette er opfyldt.

Vi vil nu give et eksempel på anvendelse af den ovenfor skitserede løsningsmetode, den såkaldte *potensrækkemetode*. Det skal på forhånd fremhæves, at potensrækkemetoden i visse tilfælde fører til løsninger, der kan udtrykkes ved hjælp af de elementære funktioner, mens metoden i andre tilfælde fører til "nye" funktioner, altså til løsninger, der ikke kan udtrykkes ved hjælp af de hidtil indførte funktionstegn. Afhængig af om differentialligningen har spillet en afgørende rolle i anvendelser og teoretiske overvejelser har man givet disse løsninger navne (Bessel funktioner, Weber funktioner, Hankel funktioner), og man har således defineret funktioner udelukkende i kraft af deres potensrækkeudviklinger.

**Eksempel 7.1** Vi ønsker at finde en løsning til differentialligningen

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + ty = 0. \tag{7.3}$$

Hertil søger vi løsninger på potensrækkeform,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \ t \in ]-\rho, \rho[. \tag{7.4}$$

Vi ønsker at bestemme hvilke koefficienter $c_n$ der leder til en løsning. Ved hjælp af reglen for differentiation af en potensrække (sætning 5.17) ses, at

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1}$$

og

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (n-1) n t^{n-2}.$$

Ved indsættelse i differentialligningen følger nu, at (7.4) er løsning til differentialligningen i konvergensintervallet, hvis og kun hvis

$$t\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} + t\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0,\ t \in ]-\rho,\rho[,$$

altså hvis og kun hvis

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} = 0,\ t \in ]-\rho,\rho[. \quad (7.5)$$

Idet vi benytter omskrivningerne

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^{n+1},\\ \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n t^{n-1} &= 2c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2c_n n t^{n-1}\\ &= 2c_1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_{n+2}(n+2)t^{n+1},\end{aligned}$$

følger det ved samling af leddene, at ligningen (7.5) er ensbetydende med at

$$2c_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + 2(n+2)c_{n+2} + c_n\right] t^{n+1} = 0,\ t \in ]-\rho,\rho[.$$

Ifølge identitetssætningen for potensrækker (korollar 5.21) er dette opfyldt, hvis og kun hvis

$$2c_1 = 0,\ \text{og}\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + 2(n+2)c_{n+2} + c_n = 0 \text{ for alle } n \geq 0.$$

Konklusionen er, at enhver løsning til differentialligningen opfylder at

$$c_1 = 0,\ c_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+3)}c_n,\ n \geq 0. \quad (7.6)$$

Koefficienterne $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ udgør altså en rekursivt givet følge. Det ses umiddelbart, at

$$c_1 = 0,\ c_3 = 0,\ c_5 = 0, \ldots,$$

dvs. at

$$c_{2n+1} = 0 \text{ for alle } n \geq 0.$$

Fastlægges en vilkårlig værdi for koefficienten $c_0$ viser (7.6) hvordan alle koefficienterne $c_n$ ser ud. For at verificere at vi virkelig får en løsning til differentialligningen, beregnes til sidst konvergensradius for den fundne række og vi checker at $\rho > 0$. Denne del af undersøgelsen vil vi foretage i eksempel 7.2. □

Ofte søges løsninger $y$ til differentialligninger der tilfredsstiller visse betingelser, f.eks. vedrørende funktionsværdierne $y(0)$ og $y'(0)$. Sådanne betingelser er bekvemme at arbejde med når $y$ er givet ved potensrækken (7.2): ifølge sætning 5.17 ved vi jo at

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\ \cdots, y^{(n)} = n!c_n. \tag{7.7}$$

Normalt søges en løsning, der opfylder visse begyndelsesværdibetingelser:

**Eksempel 7.2** Vi fortsætter eksempel 7.1, og søger nu en løsning $y$ til (7.3) der opfylder begyndelsesværdibetingelserne

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

For rækken (7.4) betyder betingelsen $y(0) = 1$ ifølge (7.7) at $c_0 = 1$, mens betingelsen $y'(0) = 0$ betyder at $c_1 = 0$. Som vi har set i (7.6) er $c_1 = 0$ opfyldt for enhver potensrækkeløsning til (7.3), så vi koncentrerer os om den førstnævnte betingelse $c_0 = 1$; via rekursionsformlen (7.6) viser den at

$$c_0 = 1,\quad c_2 = \frac{-1}{2\cdot 3} = \frac{-1}{3!},\quad c_4 = \frac{-c_2}{4\cdot 5} = \frac{1}{5!},\quad c_6 = \frac{-c_4}{6\cdot 7} = \frac{-1}{7!}.$$

For at få et generelt udtryk for koefficienterne skriver vi

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \frac{-1}{(2n+1)2n}c_{2n-2} \\
&= \frac{-1}{(2n+1)2n}\frac{-1}{(2n-1)2n-2}c_{2n-4} \\
&= \frac{-1}{(2n+1)2n}\frac{-1}{(2n-1)2n-2}\frac{-1}{(2n-3)2n-4}c_{2n-6} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

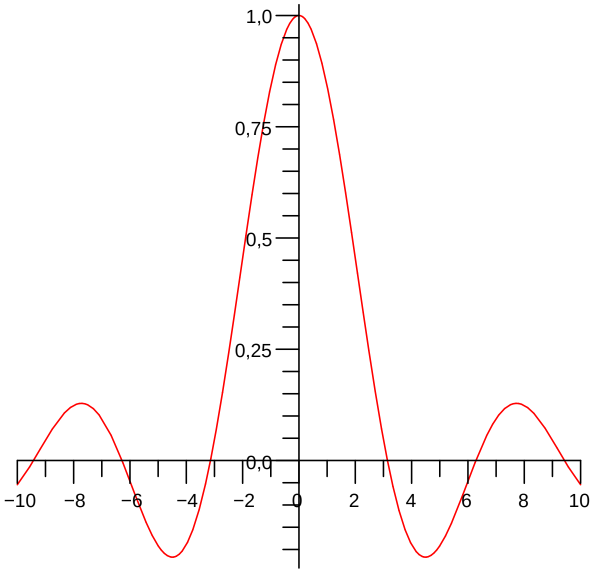
Vi har hermed vist, at funktionen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n},\ t \in ]-\rho, \rho[, \tag{7.8}$$

er en løsning til differentialligningen (7.3), der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Konvergensradius er $\rho = \infty$, som man finder ved brug af kvotientkriteriet. Løsningen (7.8) er dermed en løsning på hele $\mathbb{R}$.

Vi kan i dette tilfælde angive summen af rækken (7.8) direkte. Ved brug af potensrækken for $\sin t$ ser vi, at for $t \neq 0$ er

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1} = \frac{\sin t}{t},$$




**Figur 7.3** *Funktionen* $y$ *i* (7.9)*. Den er i litteraturen kendt under navnet sinc-funktionen.*

og for $t = 0$ er $y = 1$. Altså er

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \tag{7.9}$$

en $C^\infty$-funktion, der løser begyndelsesværdiproblemet. Se figur 7.3. □

Undertiden findes slet ikke potensrækkeløsninger til en differentialligning med givne begyndelsesværdibetingelser:

**Eksempel 7.4** Begyndelsesværdiproblemet

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + ty = 0, \;\; y(0) = 1, y'(0) = 1$$

har ikke nogen potensrækkeløsning: vi har i (7.6) i eksempel 7.1 set, at enhver potensrækkeløsning til ligningen opfylder at $c_1 = 0$, men begyndelsesbetingelsen $y'(0) = 1$ implicerer at $c_1 = 1$. Ingen potensrækkeløsning kan altså tilfredsstille den givne begyndelsesbetingelse. □

En tilsvarende fremgangsmåde kan benyttes for en inhomogen differentialligning

$$a_0(t)\frac{d^ny}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = u(t), \;\; t \in I, \tag{7.10}$$

hvor $u(t)$ har en kendt potensrækkefremstilling,

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n.$$

Man søger igen en løsning på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Hvis man nøjagtigt som før samler leddene på venstre side af (7.10) til en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, ender man med ligningen

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n.$$

Ifølge korollar 5.21 sluttes at $b_n = d_n$ for alle $n$. Da koefficienterne $b_n$ er givet i termer af koefficienterne $c_n$ kan man nu søge at finde konkrete udtryk for koefficienterne $c_n$ således at funktionen $y$ er løsning. Se opgave 326.

For andenordensligningen gælder, at selv hvis den givne ligning er inhomogen, vil man normalt først forsøge at løse den tilsvarende homogene ligning ved hjælp af potensrækkemetoden: vi har jo sætning 1.31 til rådighed, så alle løsningerne til den inhomogene ligning kan bestemmes ud fra kendskab til en løsning til den homogene ligning.

**Eksempel 7.5** Vi vender tilbage til eksempel 1.32, hvor målet var at løse differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t^2}y = \frac{1}{t}, \; t \in ]0, \infty[. \tag{7.11}$$

I eksempel 1.32 blev det gjort ved at anvende sætning 1.31 og at $y(t) = t$ er en løsning til den tilsvarende homogene ligning

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t^2}y = 0, \; t \in ]0, \infty[. \tag{7.12}$$

For at vise at $y(t) = t$ er løsning, bemærkes at (7.12) er ækvivalent med

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \; t \in ]0, \infty[. \tag{7.13}$$

Vi søger nu en løsning på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Ved indsættelse og omhyggelig udregning ses at $y$ er løsning til (7.12) hvis og kun hvis

$$c_0 = 0, \text{ og } c_n(n^2 - 3n + 2) = 0, \; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Da $n^2 - 3n + 2 \neq 0$ for $n \notin \{1, 2\}$ betyder det at

$$c_0 = 0, \text{ og } c_n = 0, \; n = 3, 4, \ldots .$$

Derfor har (7.13) løsningerne

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^2,$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Specielt er altså funktionen $y(t) = t$ en løsning, som påstået. □

Indtil videre har vi ikke diskuteret spørgsmålet om hvornår potensrækkemetoden finder anvendelse. For 2.ordensligningen gælder følgende:

**Sætning 7.6** *Betragt en differentialligning*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)y = 0, \tag{7.14}$$

*og antag at funktionerne* $a_1(t)$ *og* $a_2(t)$ *er analytiske, altså at Taylorrækken for* $a_1(t)$ *konvergerer mod* $a_1(t)$ *for* $t \in ]-\rho_1, \rho_1[$*, og at Taylorrækken for* $a_2(t)$ *konvergerer mod* $a_2(t)$ *for* $t \in ]-\rho_2, \rho_2[$*. Så har* (7.14) *en løsning*

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

*for* $t \in ]-\min(\rho_1, \rho_2), \min(\rho_1, \rho_2)[$.

Bemærk at differentialligningen (7.14) er *normaliseret* sammenlignet med (7.1), dvs. at leddet $\frac{d^2y}{dt^2}$ optræder med koefficienten 1 (når $a_0(t) \neq 0$ opnås dette i (7.1) ved division med $a_0(t)$). Betingelsen om at funktionen $a_1(t)$ er analytisk er opfyldt hvis $a_1(t)$ er en brøk med tæller og nævner bestående af polynomier, hvor nævnerpolynomiet er forskelligt fra 0 for $t = 0$. I tilfælde hvor enten $a_1(t)$ eller $a_2(t)$ ikke er analytiske kan man undertiden efter samme principper finde en løsning på formen

$$y(t) = t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+\alpha},$$

hvor $\alpha$ er en reel konstant. Metoden kaldes *Frobenius' metode.* Vi henviser til f.eks. [1] for en nærmere redegørelse.

## 7.2 Fourierrækkemetoden

Vi vender nu tilbage til analysen af et system af $n$ sammenhørende differentialligninger af 1. orden af formen (2.32),

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y = \mathbf{d}^\top \mathbf{x}, \end{cases} \tag{7.15}$$

hvor $\mathbf{d}$ er en reel søjlevektor med $n$ koordinater. Vi vil antage, at påvirkningen $u$ er $2\pi$-periodisk, og benytte Fourierrækketeorien til at finde en løsning til ligningssystemet.

Lad $H(s)$ betegne overføringsfunktionen for (7.15); som vi har set i (2.36) er den givet ved

$$H(s) = -\mathbf{d}^\top (\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}.$$

Lad os først undersøge hvor langt vi kan komme uden at anvende Fouirierrækker:

**Lemma 7.7** *Antag at systemet* (7.15) *er asymptotisk stabilt. For enhver påvirkning på formen*

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}. \tag{7.16}$$

*fås løsningen*

$$y_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n H(in) e^{int}. \tag{7.17}$$

**Bevis:** Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da systemet er asymptotisk stabilt har alle rødder i karakterligningen negativ realdel ifølge sætning 2.36 , så $s = in$ er ikke rod i det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$. Ifølge sætning 2.21 gælder derfor, at hvis påvirkningen er

$$u(t) = e^{int}, \tag{7.18}$$

så har (7.15) løsningen

$$y(t) = H(in)e^{int}. \tag{7.19}$$

Funktionen i (7.16) er en linearkombination af funktionerne i (7.18), så ifølge superpositionsprincippet fås en løsning til påvirkningen i (7.16) ved simpelthen at opskrive den tilsvarende linearkombination af løsningerne hørende til funktionerne i (7.18). Herved fås præcis det udtryk der angives i (7.17). □

Vi vil derfor i det følgende antage, at (7.15) er et asymptotisk stabilt system. Lad påvirkningen $u$ være en vilkårlig $2\pi$-periodisk, stykkevis differentiabel og kontinuert funktion i $L^2(-\pi, \pi)$. Vi skriver dens Fourierrække

på kompleks form,

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7.20}$$

Spørgsmålet er, om der også gælder at svaret på påvirkningen $u$ er

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7.21}$$

Svaret viser sig at være ja; beviset herfor er i appendiks A.10.

**Sætning 7.8 (Fourierrækkemetoden)** *Lad $H(s)$ betegne overførings-funktionen for det asymptotisk stabile system* (7.15). *Betragt en $2\pi$-periodisk stykkevis differentiabel og kontinuert påvirkning $u(t)$, givet ved Fourierrækken*

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Så har* (7.15) *en løsning givet ved Fourierrækken*

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7.22}$$

I sætning 7.8 fås løsningen til differentialligningen altså ikke udtrykt v.h.a. de sædvanlige funktioner, men via den uendelige række (7.22). I praksis kan man ved computerberegninger kun betragte endelige summer, så man er nødt til at erstatte den uendelige række (7.22) med en endelig afsnitssum. Dette er én af grundene til at vi har udviklet teoretiske redskaber til at afgøre hvor mange led man skal tage med i afsnitssummen for en Fourierrække for at opnå en ønsket præcision (se sætning 6.12 og sætning 6.17). For den type differentialligningssystemer vi betragter her, er dette fuldt tilstrækkeligt; men i andre sammenhænge, der ikke vedrører differentialligninger og hvor funktionen $u$ ikke nødvendigvis er kontinuert, må man benytte andre metoder. Én af dem beskrives i det næste afsnit.

**Eksempel 7.9** Betragt "savtak funktionen", dvs. den $2\pi$-periodiske funktion givet ved

$$u(t) = |t|, \; t \in [-\pi, \pi[.$$

Ved udregning ses, at Fourierkoefficienterne er

$$b_n = 0, \text{ og } a_n = \begin{cases} \pi & \text{for } n = 0, \\ 0 & \text{for n lige, } n > 0, \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2} & \text{for n ulige.} \end{cases}$$

Fourierrækken er dermed

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)t).$$

Fourierrækken på kompleks form er da ifølge (6.33) givet ved

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

hvor

$$c_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for } n = 0, \\ 0 & \text{for n lige, } n \neq 0, \\ -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2} & \text{for n ulige.} \end{cases} \tag{7.23}$$

Bemærk, at da $b_n = 0$ for alle $n$, behøver man i beregningen af $c_n$ ikke at skelne mellem $n > 0$ og $n < 0$. Fourierrækken på kompleks form kan nu skrives

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}, n \text{ ulige}} \frac{1}{n^2} e^{int}.$$

Lad os benytte $u(t)$ som påvirkning på et asymptotisk stabilt differentialligningssystem med overføringsfunktion $H(s) = \frac{1}{1+s}$. Ifølge sætning 7.8 fås da en løsning, hvis Fourierrække er givet ved

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int} &(7.24)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{1+in} e^{int}. &(7.25) \end{aligned}$$

Ved at udnytte at $c_n = 0$ for $n$ lige (pånær for $n = 0$) kan (7.24) skrives

$$y(t) = c_0 H(0) + \sum_{n\in\mathbb{Z},\ n \text{ ulige}} c_n H(in) e^{int}.$$

Ved indsættelse af koefficienterne $c_n$ i dette udtryk fås

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\pi}{2} H(0) - \frac{2}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}, n \text{ ulige}} \frac{1}{n^2} H(in) e^{int} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}, n \text{ ulige}} \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+in} e^{int}. &(7.26) \end{aligned}$$

Funktionen $y$ givet ved (7.26) er ikke umiddelbart kendt, så vi har brug for vores metoder til at afgøre hvor mange led vi skal tage med for at få en fornuftig approksimation. Her viser det sig hensigtsmæssigt at tage

udgangspunkt i udtrykket (7.25). Ved en overvejelse nøjagtigt som i beviset for sætning 6.17 ses, at

$$\begin{aligned} \left| y(t) - \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{1+in} e^{int} \right| &= \left| \sum_{|n|>N} \frac{c_n}{1+in} e^{int} \right| \\ &\le \sum_{|n|>N} \left| \frac{c_n}{1+in} \right| \\ &\le \sum_{|n|>N} \frac{|c_n|}{\sqrt{1+n^2}}. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Ved at indsætte udtrykket for $c_n$ ser vi at

$$\frac{|c_n|}{\sqrt{1+n^2}} \le |c_n| \le \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2}.$$

Husk at der i (7.27) summeres over både postitive og negative værdier af $n$. Vi kan nu alt i alt konkludere at

$$\left| y(t) - \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{1+in} e^{int} \right| \le \frac{4}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{4}{\pi} \frac{1}{N}. \tag{7.28}$$

Ved den sidste ulighed har vi atter benyttet (4.35). Hvis vi ønsker at vælge afsnitssummen af rækkefremstillingen for $y$ således at

$$\left| y(t) - \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{1+in} e^{int} \right| \le 0.01, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

er det nok at tage $N$ således at $\frac{4}{\pi}\frac{1}{N} \le 0.01$; dette leder til

$$N \ge \frac{400}{\pi},$$

dvs. $N \ge 128$.

I regningen ovenfor er der for overskuelighedens skyld foretaget nogle ret grove vurderinger, der bevirker at den fundne $N$-værdi er større end strengt nødvendigt. Se opgave 230. □

## 7.3 Approksimation i effekt

Lad os betragte en $2\pi$-periodisk funktion $f$, og lad os skrive Fourierrækken for $f$ på kompleks form,

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7.29}$$

Som sædvanlig er den $N$'te afsnitssum

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$

Hvis $f$ er kontinuert og stykkevis differentiabel, så konvergerer Fourierrækkens $N$'te afsnitssum $S_N$ uniformt mod $f$. Det betyder, at vi for ethvert givet $\epsilon > 0$ kan opnå at

$$|f(t) - S_N(t)| \leq \epsilon \;\forall t \in \mathbb{R}$$

ved at vælge $N$ tilstrækkelig stor. Hvis funktionen $f$ ikke er kontinuert er der ingen mulighed for at opnå en vurdering af denne type for små værdier af $\epsilon$. I dette tilfælde vil vi i stedet vælge afsnitssummen $S_N$ således at en god approksimation i *effekt* opnås.

**Definition 7.10 (Effekt)** *Effekten af en $2\pi$-periodisk funktion $f$ defineres ved*

$$P(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt.$$

Effekten af en $2\pi$-periodisk funktion $f$ kan beregnes udfra kendskab til Fourierkoefficienterne:

**Lemma 7.11** *Lad $f$ være en $2\pi$-periodisk funktion med Fourierkoefficienter $c_n$ (kompleks form). Så gælder følgende:*

*(i) Effekten af $f$ er*

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

*(ii) For $N \in \mathbb{N}$ er effekten af afsnitssummen $S_N$ givet ved*

$$P(S_N) = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2. \tag{7.30}$$

**Bevis:** Resultatet i (i) er en omformulering af Parsevals sætning, sætning 6.25. Resultatet i (ii) følger ved at anvende resultatet i (i) på funktionen $S_N$, som netop har Fourierkoefficienterne

$$\cdots, 0, 0, c_{-N}, c_{-N+1}, \cdots, c_{N-1}, c_N, 0, 0, \cdots$$

Et direkte argument for (ii) er givet i afsnit A.11. □

Det følger af lemma 7.11 at $P(S_N) \leq P(f)$ for alle $N \in \mathbb{N}$. Man kan endvidere vise at

$$P(f - S_N) = P(f) - P(S_N) \to 0 \text{ for } N \to \infty. \tag{7.31}$$

Vi bemærker at dette *ikke* er trivielt, da effekten $P$ ikke er lineær - se en uddybende forklaring i appendiks A.11. Baseret på (7.31) kan man sige at afsnitssummen $S_N$ *approksimerer funktionen* $f$ *i effekt.* Bemærk at dette er tilfældet uden nogen antagelser om funktionen $f$. Hvis vi ønsker at bestemme $N$ således at $S_N$ indeholder mindst 90 % af effekten af $f$, så skal vi løse uligheden

$$\frac{P(S_N)}{P(f)} \geq 0.9; \tag{7.32}$$

man kan vise at (7.32) er opfyldt hvis og kun hvis

$$\sum_{|n|>N} |c_n|^2 \leq (1-0.9)P(f).$$

En tilsvarende udregning kan gennemføres med 90 % erstattet af en vilkårlig procentsats, dvs. med tallet 0.9 i (7.32) erstattet af et vilkårligt $\delta \in ]0,1[$. Vi formulerer resultatet for Fourierrækker på såvel kompleks som reel form:

**Sætning 7.12 (Approksimation i effekt)** *For ethvert* $0<\delta<1$ *gælder:*
*(i) (Fourierrække på kompleks form)*

$$\frac{P(S_N)}{P(f)} \geq \delta \Leftrightarrow \sum_{|n|>N} |c_n|^2 \leq (1-\delta)P(f).$$

*(ii) (Fourierrække på reel form)*

$$\frac{P(S_N)}{P(f)} \geq \delta \Leftrightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq 2(1-\delta)P(f).$$

For en given værdi af $N$ kan man ofte finde en passende værdi for $N$ ved hjælp af integralkriteriet.

**Eksempel 7.13** Den $2\pi$-periodiske funktion givet ved

$$f(t) = t, \ t \in [-\pi, \pi[$$

har ifølge eksempel 6.7 Fourierkoefficienterne (reel form)

$$a_n = 0, \ b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Da funktionen $f$ ikke er kontinuert konvergerer Fourierrækken ikke uniformt mod $f$, dvs. vi kan ikke gøre $|f(t) - S_N(t)|$ vilkårligt lille simultant for alle $t$. Vi vil nu bestemme $N$ således at afsnitssummen $S_N$ indeholder mindst 90% af effekten af $f$. Af (6.37) følger at

$$P(f) = \frac{\pi^2}{3},$$

så ifølge sætning 7.12 (ii) med $\delta = 0.9$ skal vi vælge $N$ således at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\frac{2}{n}(-1)^{n+1}|^2 \leq 2(1-0.9)\frac{\pi^2}{3},$$

dvs. således at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{60}.$$

Ifølge udregningen i (4.35) er

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N},$$

så det er nok at vælge $N$ således at

$$\frac{1}{N} \leq \frac{\pi^2}{60}.$$

Denne ulighed er opfyldt for $N \geq 7$. Vi slutter, at afsnitssummen

$$S_7(t) = 2\sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

indeholder mindst 90% af effekten. Se figuren i Maplekompendiet afsnit D.4.5. □

## 7.4 Eksponentialmatricen

Vi minder om, at rækkefremstillingen for den sædvanlige reelle eksponentialfunktion er

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k, \; x \in \mathbb{R}.$$

I dette afsnit indføres en generalisation, hvor tallet $x$ erstattes af en matrix. Vi vil se, at vi herved får et redskab til at løse systemer af differentialligninger.

Lad $\mathbf{A}$ være en vilkårlig kvadratisk $n \times n$-matrix. Hørende til $\mathbf{A}$ defineres i dette afsnit en $n \times n$-matrix $e^{\mathbf{A}}$, som kaldes eksponentialmatricen for $\mathbf{A}$. Som vi vil se i sætning 7.16, spiller denne matrix en vigtig rolle, når man skal løse systemer af 1. ordens differentialligninger.

Antag at der er givet en uendelig følge

$$\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$$

af $n \times n$-matricer samt en $n \times n$-matrix $\mathbf{A}$. Lad $a_{k,rs}$ (henh. $a_{rs}$) betegne det element i $\mathbf{A}_k$ (henh. $\mathbf{A}$), der står i række $r$ og søjle $s$. Hvis der for ethvert $r, s = 1, \ldots, n$ gælder at rækken $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,rs}$ er konvergent med sum $a_{rs}$, så siges matrixrækken

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots$$

at være *konvergent* med summen $\mathbf{A}$.

For en vilkårlig $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ sættes $\mathbf{A}^0 := \mathbf{I}$. Lad nu $\mathbf{A} = (a_{rs})$ være en vilkårlig $n \times n$-matrix med reelle elementer. Da er rækken

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \frac{1}{1!}\mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots \tag{7.33}$$

konvergent. Thi hvis vi vælger et positivt tal $M$ således at $M \geq |a_{rs}|$ for alle $r, s$, da vil den numeriske værdi af et vilkårligt element i matricen $\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$ højst være $\frac{1}{k!}n^{k-1}M^k = \frac{1}{nk!}(nM)^k$; da rækken $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(nM)^k$ er konvergent (det er jo rækkefremstillingen for $e^{nM}$), er (7.33) også konvergent. Vi *definerer* nu eksponentialmatricen $e^{\mathbf{A}}$ som summen af rækken (7.33), altså

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k. \tag{7.34}$$

Specielt fås for nulmatricen $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ at

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots = \mathbf{I}.$$

Eksponentialmatricen hørende til nulmatricen er altså identitetsmatricen, svarende til at $e^0 = 1$ for den sædvanlige eksponentialfunktion $e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

**Eksempel 7.14** Lad os finde eksponentialmatricen hørende til en diagonalmatrix

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Først bemærkes, at

$$\mathbf{\Lambda}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \lambda_2^k & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Af (7.33) fås derfor ved elementvis udregning, at

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{\Lambda}} &= \begin{pmatrix} 1+\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1^2+\cdots & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2^2+\cdots & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1+\lambda_n+\frac{1}{2}\lambda_n^2+\cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_2^k & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k. \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ved brug af rækkefremstillingen for den sædvanlige reelle eksponentialfunktion følger det nu, at

$$
e^{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \qquad \square
$$

For en given matrix $\mathbf{A}$ vil vi ofte betragte eksponentialmatricen $e^{\mathbf{A}t}$ hvor $t$ er et reelt tal. Denne symbolsammensætning skal forstås på følgende måde: først ganges matricen $\mathbf{A}$ med tallet $t$, dvs. alle indgange i $\mathbf{A}$ multipliceres med $t$. Herved fremkommer en ny matrix,

$$
\mathbf{A}t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} a_{11}t & a_{12}t & \cdot & \cdot & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22}t & \cdot & \cdot & a_{2n}t \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \cdot & \cdot & a_{nn}t \end{pmatrix}.
$$

Ved $e^{\mathbf{A}t}$ forstås nu eksponentialmatricen hørende til matricen $\mathbf{A}t$:

$$
e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k. \tag{7.35}
$$

Eksponentialmatricen $e^{\mathbf{A}t}$ er altså en funktion af $t$, hvor "funktionsværdierne" er matricer.

**Eksempel 7.15** Vi vil udregne $e^{\mathbf{A}}$, når $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ved udregning finder vi, at

$$
\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \text{ og } \mathbf{A}^n = \mathbf{A} \text{ for } n > 0. \tag{7.36}
$$

Af (7.34) fås derfor

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots .$$

Vi kan nu bestemme matricen $e^{\mathbf{A}}$ ved at betragte hver indgang for sig. Ved at benytte rækkefremstillingen (5.10) for eksponentialfunktionen $e^x$ med $x = 1$ fås for indgangen $a_{12}$ at

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - 1 \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

Læseren opfordres til at udregne de andre indgange på samme måde, og herved verificere at

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

På tilsvarende måde vil vi nu finde matricen $e^{\mathbf{A}t}$. Af (7.36) følger, at

$$(\mathbf{A}t)^0 = \mathbf{I},$$

og

$$(\mathbf{A}t)^n = \mathbf{A}^n t^n = \mathbf{A}t^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t^n = \begin{pmatrix} 0 & t^n \\ 0 & t^n \end{pmatrix}.$$

Af (7.34) fås derfor

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} + \cdots .$$

Vi kan nu bestemme matricen $e^{\mathbf{A}}$ ved at betragte hver indgang for sig. For indgangen $a_{12}$ fås ved atter at anvende (5.10) at

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= 0 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}t^k + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - 1 \\ &= e^t - 1. \end{aligned}$$

Ved at beregne de andre indgange på samme måde ses, at

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

□

Eksponentialmatricen er et nyttigt redskab ved løsning af differentialligningssystemer af typen (2.4). Forklaringen herpå er, at matrixeksponentialfunktionen $e^{\mathbf{A}t}$ differentieres ved hjælp af en formel, der er analog med formlen for differentiation af $e^{at}$. Der gælder nemlig for enhver kvadratisk matrix $\mathbf{A}$, at

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}. \tag{7.37}$$

Argumentet herfor bruger (7.35) og er som følger:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k k t^{k-1} \\ &= \mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^{k-1}t^{k-1} \\ &= \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k \\ &= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.\end{aligned}$$

Denne formel har følgende vigtige konsekvens:

**Sætning 7.16** *Den fuldstændige løsning til det homogene differentialligningssystem* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, *se* (2.4), *kan ved hjælp af eksponentialmatricen* $e^{\mathbf{A}t}$ *skrives som*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c},\ \ \mathbf{c} = (c_1\ c_2\ \ldots\ c_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

*og den partikulære løsning, for hvilken* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *er givet ved*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0.$$

Ved hjælp af definitionen af eksponentialmatricen kan man vise, at

$$\mathbf{A}\cdot e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{A}. \tag{7.38}$$

En matrix kommuterer altså med sin eksponentialmatrix. Man kan vise, at når $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ kommuterer, så gælder formlen

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}. \tag{7.39}$$

Sættes her specielt $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ fås, at

$$e^{\mathbf{A}}\cdot e^{-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}.$$

For *enhver* matrix $\mathbf{A}$ er $e^{\mathbf{A}}$ altså en regulær matrix og

$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}. \tag{7.40}$$

# Bilag A

## Appendiks A

### A.1 Definitioner og notation

Den matematiske analyse baseret på et antal forudsætninger angående mængden af reelle tal $\mathbb{R}$, såkaldte *aksiomer,* på baggrund af hvilke alle resultater bevises. De fleste af aksiomerne vedrører regneregler, såsom f.eks. at den kommutative lov $a + b = b + a$ gælder for alle $a, b \in \mathbb{R}$.

I dette afsnit vil vi fremhæve et resultat, der optræder eksplicit i flere beviser i bogen. Vi starter med en definition.

**Definition A.1**

*(i) En delmængde $E$ af de reelle tal $\mathbb{R}$ siges at være opadtil begrænset hvis der findes et tal $\beta \in \mathbb{R}$ således at*

$$x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{A.1}$$

*Et tal $\beta$ der tilfredsstiller* (A.1) *kaldes en øvre grænse for $E$.*

*(ii) Tilsvarende siges mængden $E$ at være nedadtil begrænset hvis der findes et $\alpha \in \mathbb{R}$ således at*

$$\alpha \leq x, \ \forall x \in E. \tag{A.2}$$

*Et tal $\alpha$ der tilfredsstiller* (A.2) *kaldes en nedre grænse for $E$.*

Betragt nu en mængde $E$, der er opadtil begrænset. Det *mindste* tal $\beta$ som tilfredsstiller (A.1) kaldes for *supremum* over $E$, og skrives $\sup E$ eller $\sup_{x \in E} x$. Eksistensen af et sådant mindste tal $\beta$ virker yderst rimelig, og kan bevises baseret på egenskaberne ved de reelle tal.

For en nedadtil begrænset delmængde $E$ af $\mathbb{R}$ vil den største nedre grænse blive betegnet med *infimum* over $E$, og skrives $\inf E$.

**Eksempel A.2**

$$\sup ]0,4] = 4, \quad \sup[-2,5[= 5, \quad \inf]-2,1] = -2, \quad \inf(\mathbb{Q} \cap [\pi, 7]) = \pi.$$

□

**Lemma A.3** *Lad* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *være en voksende og begrænset følge af reelle tal; dvs. de følgende to betingelser er opfyldt:*

*(i)* $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \cdots \leq k_n \leq \cdots$*;*

*(ii) der findes et tal* $k$ *således at*

$$k_n \leq k, \ \forall n.$$

*Så eksisterer grænseværdien* $\lim_{n\to\infty} k_n$*, og*

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \sup\{k_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

*Tilsvarende er en aftagende og nedadtil begrænset følge* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *af reelle tal konvergent, og*

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \inf\{k_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

**Bevis:** Vi betragter mængden

$$E = \{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\}.$$

Pr. antagelse er mængden $E$ opadtil begrænset; derfor eksisterer

$$\sup E = \sup\{k_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Vi skal vise, at $k_n \to \sup E$ for $n \to \infty$, dvs. at der for et vilkårligt givet $\epsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|\sup E - k_n| \leq \epsilon \text{ for } n \geq N.$$

Lad os derfor forestille os $\epsilon > 0$ givet. Da $\sup E$ er den *mindste* øvre grænse for tallene i $E$ kan vi finde et $N \in \mathbb{N}$ således at

$$0 \leq \sup E - k_N \leq \epsilon.$$

Men da følgen $k_n$ er voksende (og værdierne pr. definition ikke overstiger $\sup E$) kan vi nu slutte, at

$$0 \leq \sup E - k_n \leq \epsilon \text{ for alle } n \geq N.$$

Hermed er beviset for lemmaets første halvdel afsluttet. □

## A.2 Vektorrum og lineære afbildninger

Vi minder om at et *vektorrum* er en mængde $V$, der er udstyret med operationerne *addition* og *skalarmultiplikation*, som opfylder visse regler (se definition A.4). Operationen "addition" knytter til hvert par af elementer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ et element i $V$ som vil blive kaldet $\mathbf{v}+\mathbf{w}$; og operationen "skalarmultiplikation" knytter til ethvert $\mathbf{v} \in V$ og ethvert $\alpha \in \mathbb{C}$ et element i $V$ som vil blive kaldet $\alpha\mathbf{v}$ eller $\mathbf{v}\alpha$. Bemærk at vi tillader skalarerne $\alpha$ at være komplekse tal! Bortset herfra vil vi definere vektorrum nøjagtigt som de kendes fra f.eks. MAT 1. De præcise krav til operationerne "addition" og "skalarmultiplikation" er formuleret i følgende definition:

**Definition A.4 (Komplekst Vektorrum)** *Betragt en mængde $V \neq \emptyset$, der er udstyret med operationerne addition and skalarmultiplication. Vi siger at $V$ er et (komplekst) vektorrum hvis følgende regler er opfyldt:*

*(i)* $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ *for alle* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$;

*(ii)* $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u})$ *for alle* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$;

*(iii) Der findes en vektor, kaldet* $\mathbf{0} \in V$, *for hvilken* $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ *for alle* $\mathbf{v} \in V$;

*(iv) For ethvert* $\mathbf{v} \in V$ *findes et element, kaldet* $-\mathbf{v}$, *således at* $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$;

*(v) For alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *og alle* $\mathbf{v} \in V$ *er* $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$;

*(vi) For alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *og alle* $\mathbf{v} \in V$ *er* $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$;

*(vii) For alle* $\alpha \in \mathbb{C}$ *og alle* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *er* $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$;

*(viii) For alle* $\mathbf{v} \in V$ *er* $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

I dette kursus vil de fleste vektorrum bestå af funktioner:

**Eksempel A.5** Lad $V$ betegne mængden af funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. For $f, g \in V$ defineres funktionen $f + g$ ved

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t), \; t \in \mathbb{R},$$

og for $f \in V$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ defineres funktionen $\alpha f$ ved

$$(\alpha f)(t) := \alpha f(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Med disse operationer er $V$ et vektorrum. □

De vektorrum vi betragter vil typisk bestå af løsninger til lineære differentialligninger. Derfor er de relevante funktioner differentiable. Det viser sig at de interessante funktioner $f$ endda er *vilkårligt ofte differentiable.* Det betyder, at den afledte $f'$ selv er en differentiabel funktion, hvis afledte $f''$ er differentiabel, osv.

**Eksempel A.6** Lad $C^\infty(\mathbb{R})$ betegne mængden af funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, der er vilkårligt ofte differentiable. På symbolform skrives dette som

$$C^\infty(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ er vilkårligt ofte differentiabel}\}.$$

Vi bemærker at mængden $C^\infty(\mathbb{R})$ er en delmængde af vektorrummet i eksempel A.5. Derfor vil vi benytte de samme definitioner af addition og skalarmultiplikation. Med disse operationer er $C^\infty(\mathbb{R})$ også et vektorrum (et såkaldt *underrum* af vektorrummet $V$ i eksempel A.5). □

Begrebet "lineær afbildning" er velkendt fra lineær algebra. For en god ordens skyld gentages definitionen her.

**Definition A.7 (Lineær afbildning)** *Lad $V$ betegne et vektorrum. En afbildning $T : V \to V$ er lineær hvis*

$$T(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha T(\mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{w}),\ \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Vi vil i dette kursus primært betragte lineære afbildninger, som virker ved differentiation, såkaldte *differentialoperatorer.*

**Eksempel A.8** Vi kan definere en lineær afbildning på vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R})$ ved

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad Df := f'. \tag{A.3}$$

Den lineære afbildning $D$ kaldes en *differentialoperator* (eller blot *operator*). Den knytter altså til enhver funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ en ny funktion, nemlig den afledte $f'$. At $D$ faktisk er lineær følger af de velkendte regler for differentiation af en linearkombination af 2 funktioner:

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha Df + \beta Dg.$$

Bemærk at variablen $t$ ikke er nævnt eksplicit i (A.3). Undertiden er det en fordel at lade $t$ indgå, og man vil så skrive

$$(Df)(t) = f'(t).$$

Hvis vi for eksempel betragter funktionen $f(t) = \sin(t)$, fås således

$$(Df)(t) = f'(t) = \cos(t).$$ □

**Eksempel A.9** Ved hjælp af differentialoperatoren $D$ i eksempel A.8 kan vi indføre en hel klasse af lineære afbildninger. Vi vil først betragte den afbildning man får ved at differentiere en given funktion to gange; dette svarer til at sammensætte operatoren $D$ med sig selv, eller at anvende den to gange på en given funktion. Den resulterende operator betegnes $D^2$ eller $DD$ :

$$D^2 : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad D^2 f := D(Df) = f''. \tag{A.4}$$

Mere generelt defineres $D^k,\ k \in \mathbb{N}$, ved

$$D^k : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad D^k f := f^{(k)}. \tag{A.5}$$

Afbildningen $D^k$ knytter altså til en funktion $f$ dens $k$'te afledte. For funktionen $f(t) = \sin(t)$ fås for eksempel

$$(D^2 f)(t) = f''(t) = -\sin(t).$$

Alle afbildningerne $D^k$ er lineære, og de kaldes også differentialoperatorer.

Ved hjælp af differentialoperatorerne $D^k$ kan vi omskrive den homogene differentialligning $D_n(y) = 0$. Denne ligning betyder netop at

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0,$$

hvilket, udtrykt via operatorerne $D^k$, kan skrives som

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = 0$$

eller

$$\big(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\big)\, y = 0.$$

Her definerer hele udtrykket

$$D_n := a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n \tag{A.6}$$

i sig selv en lineær afbildning - der er jo tale om en linearkombination af lineære afbildninger. □

**Eksempel A.10** Ved hjælp af notationen i eksempel A.9 kan differentialligningen

$$3\,\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\,\frac{dy}{dt} + y = 0$$

omskrives til

$$(3D^2 + 2D + 1)y = 0.$$

Helt tilsvarende kan ligningen

$$(D - 5)y = 0$$

skrives som

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 0.$$

□

Vi får brug for at sammensætte operatorer af typen $D - b$, altså at anvende flere af disse operatorer efter hinanden. I tilfældet $b = 0$ er dette allerede antydet i (A.4), hvor operatoren $D^2$ netop fremkommer ved at differentiere to gange. Den præcise betydning af sammensætningen fremgår af det næste eksempel.

**Eksempel A.11** For ethvert $b \in \mathbb{R}$ er operatoren $D - b$ givet ved

$$(D-b)f = f' - b\,f.$$

Givet vilkårlige tal $a, b \in \mathbb{R}$ vil vi betragte operatoren $(D-a)(D-b)$. Dens virkning på en funktion $f$ findes ved at vi først udregner funktionen $(D-b)f$, og herefter virker på resultatet med operatoren $(D-a)$. Vi får således

$$\begin{aligned}(D-a)(D-b)f &= (D-a)(Df-bf) = (D-a)(f'-bf)\\ &= D(f'-bf) - a(f'-bf)\\ &= f'' - bf' - af' + abf\\ &= f'' - (a+b)f' + abf\\ &= \left(D^2 - (a+b)D + ab\right) f.\end{aligned}$$

Nøjagtig samme udregning viser at

$$(D-b)(D-a)f = \left(D^2 - (a+b)D + ab\right) f.$$

Det følger heraf at

$$(D-a)(D-b)f = (D-b)(D-a)f. \tag{A.7}$$

Rækkefølgen af de to operatorer $D-a$ og $D-b$ er altså underordnet. I tilfældet, hvor $a = b$, vil vi skrive

$$(D-a)^2 := (D-a)(D-a).$$

Helt tilsvarende defineres $(D-a)^k$ ved at anvende operatoren $D-a$ ialt $k$ gange på en given funktion. □

## A.3 $n$'te ordens homogene differentialligninger

Vi vil i dette afsnit betragte den homogene lineære differentialligning af $n$-te orden som er opstillet i (1.6), altså

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0. \tag{A.8}$$

På kort form har vi skrevet ligningen på formen

$$D_n(y) = 0.$$

Vi har i (A.6) i appendiks A.2 set at vi kan skrive

$$D_n(y) = \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right) y, \tag{A.9}$$

og at $D_n$ således er en lineær afbildning.

**Bevis for sætning 1.4:** At en funktion $y$ er løsning til (1.6) betyder at $D_n(y) = 0$. Hvis funktionerne $y_1$ og $y_2$ er løsninger til (1.6), dvs. $D_n(y_1) = 0$ og $D_n(y_2) = 0$, følger det nu at funktionen $y = c_1y_1 + c_2y_2$ opfylder at

$$D_n(y) = D_n(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1D_n(y_1) + c_2D_n(y_2) = 0.$$

Dermed er $y$ også en løsning, som ønsket. □

Målet for resten af dette afsnit er at bevise sætning 1.15, der vedrører løsningerne til ligningen $D_n(y) = 0$. Bemærk at opskrivning af $D_n$ i (A.9) er helt parallel med vores introduktion af det karakteristiske polynomium,

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Som bekendt kan det karakteristiske polynomium skrives som et produkt af førstegradsfaktorer (definition 1.13),

$$P(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{p_k}, \tag{A.10}$$

hvor $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ er rødderne, og $p_1, \ldots, p_k$ de tilsvarende multipliciteter. Med en helt tilsvarende opspaltning kan operatoren $D_n$ skrives som

$$D_n(y) = a_0(D - \lambda_1)^{p_1}(D - \lambda_2)^{p_2} \cdots (D - \lambda_k)^{p_k}y.$$

Et formelt bevis herfor kan for eksempel føres ved induktion. Ligningen (A.8) tager så formen

$$a_0(D - \lambda_1)^{p_1}(D - \lambda_2)^{p_2} \cdots (D - \lambda_k)^{p_k}y = 0. \tag{A.11}$$

Dette leder til følgende vigtige delresultat:

**Lemma A.12** *Antag at funktionen $y$ opfylder at*

$$(D - \lambda_j)^{p_j}y = 0 \tag{A.12}$$

*for et $j = 1, \ldots, k$. Så er $y$ en løsning til differentialligningen $D_n(y) = 0$.*

**Bevis:** Vi tager udgangspunkt i (A.11). Ifølge (A.7) er rækkefølgen af operatorerne $D - \lambda_j$ i (A.11) underordnet Ved at bytte om på faktorernes rækkefølge kan vi derfor skrive (A.11) som

$$a_0(D - \lambda_1)^{p_1} \cdots (D - \lambda_{j-1})^{p_{j-1}}(D - \lambda_{j+1})^{p_{j+1}} \cdots (D - \lambda_k)^{p_k}(D - \lambda_j)^{p_j}y = 0.$$

Hvis vi heri indsætter at $(D - \lambda_j)^{p_j}y = 0$, får vi ligningen

$$a_0(D - \lambda_1)^{p_1} \cdots (D - \lambda_{j-1})^{p_{j-1}}(D - \lambda_{j+1})^{p_{j+1}} \cdots (D - \lambda_k)^{p_k}0 = 0.$$

Da en lineær afbildning anvendt på nulvektoren altid giver nul, er denne ligning opfyldt, og vi har alt i alt vist at funktionen $y$ er løsning til den angivne differentialligning. □

Vi kan altså finde en hel stribe løsninger til (A.8) og dens ækvivalente form i (A.11), ved simpelthen at løse alle ligningerne i (A.12) for $j =$

$1, \ldots, k$. For at simplificere notationen vil vi nu helt generelt løse en ligning på formen

$$(D - \lambda)^p y = 0, \tag{A.13}$$

hvor $p \in \mathbb{N}$ og $\lambda \in \mathbb{C}$.

**Lemma A.13** *Ligningen* (A.13) *har de p lineært uafhængige løsninger*

$$e^{\lambda t}, \ te^{\lambda t}, \ \cdots \ t^{p-1}e^{\lambda t}. \tag{A.14}$$

En metode til at bevise lemma A.13 er angivet i opgave 904. Tilsammen giver vores lemmaer en stor del af beviset for sætning 1.15:

**Bevis for sætning 1.15:** Vi benytter atter opskrivningen af det karakteristiske polynomium som produkt af førstegradsfaktorer, se (A.19). Via lemma A.12 og lemma A.13 kan vi opskrive ialt $n$ løsninger til (A.8), nemlig

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 t}, \ te^{\lambda_1 t}, \ \cdots, t^{p_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
&e^{\lambda_2 t}, \ te^{\lambda_2 t}, \ \cdots, t^{p_2-1}e^{\lambda_1 t}, \\
&\ldots\ldots \\
&e^{\lambda_k t}, \ te^{\lambda_k t}, \ \cdots, t^{p_k-1}e^{\lambda_k t}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Disse løsninger er lineært uafhængige (opgave 905), og da der er tale om en $n$'te ordens differentialligning er løsningsrummet netop $n$-dimensionelt. Dermed fås den fuldstændige løsning ved at tage linearkombinationer af de fundne løsninger i (A.15). □

## A.4 Systemer af differentialligninger

Lad os som i afsnit 2.2 betragte et homogent system af 1.ordens differentialligninger,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{A.16}$$

Hovedresultaterne i afsnit 2.2 angående løsningerne til (A.16) vises mest bekvemt ved at benytte resultater fra lineær algebra. I dette afsnit introduceres den nødvendige lineære algebra, hvorefter skridtet til løsning af differentialligningssystemerne tages i de tilhørende opgaver.

I sætning 2.3 nævnes at egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er lineært uafhængige. Lad os opstille dette som et selvstændigt resultat:

**Lemma A.14** *Antag at* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *er forskellige egenværdier for matricen* $\mathbf{A}$, *med tilhørende egentlige egenvektorer* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. *Så er* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *lineært uafhængige.*

**Bevis:** Lad $m$ betegne det maksimale antal lineært uafhængige vektorer vi kan finde blandt $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Så er $m \leq k$. Vi ønsker at vise at $m = k$. For

at opnå en modstrid antager vi nu at $m < k$. Ved passende nummerering af vektorerne kan vi antage at $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uafhængige. Per antagelse er vektorerne

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}$$

lineært afhængige. Derfor findes der konstanter $c_1, \ldots, c_m, c_{m+1}$ (ikke alle nul) således at

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m + c_{m+1}\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{0}. \tag{A.17}$$

Her er $c_{m+1} \neq 0$, da $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uafhængige. Vi kan derfor isolere $\mathbf{v}_{m+1}$ i (A.17) og for passende nye koefficienter $d_1, \ldots, d_m$ skrive

$$\mathbf{v}_{m+1} = d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_m\mathbf{v}_m. \tag{A.18}$$

Vi anvender nu matricen $\mathbf{A} - \lambda_{m+1}\mathbf{I}$ på begge sider af lighedstegnet. Herved fås

$$(\mathbf{A} - \lambda_{m+1}\mathbf{I})\,\mathbf{v}_{m+1} = (\mathbf{A} - \lambda_{m+1}\mathbf{I})\,(d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_m\mathbf{v}_m)\,,$$

som ved udregning giver

$$\mathbf{0} = d_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})\mathbf{v}_1 + \cdots + d_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})\mathbf{v}_m.$$

Da vektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uafhængige, kan vi nu slutte at

$$d_i(\lambda_i - \lambda_{m+1}) = 0, \; i = 1, \ldots, m,$$

og dermed at

$$d_i = 0, \; i = 1, \ldots, m.$$

Men så viser (A.18) at $\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{0}$, hvilket er en modstrid. Vi slutter derfor at $m = k$, som ønsket. □

Som vi har set (og bevist) i første halvdel af sætning 2.3, har ligningen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ løsninger af formen

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \tag{A.19}$$

hvor $\lambda$ er en egenvektor for matricen $\mathbf{A}$ og $\mathbf{v}$ er en tilhørende egenvektor. I sætning 2.3 nævnes at løsninger af denne form, hørende til lineært uafhængige egenvektorer, er lineært uafhængige. Lad os give et bevis herfor:

**Bevis for anden halvdel af sætning 2.3:** Antag at egenvektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_K$ er lineært uafhængige. Det betyder at den eneste løsning til ligningen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_K\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$$

er $c_1 = c_2 = \cdots = c_K = 0$. Lad $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_K$ være egenværdierne hørende til egenvektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_K$, og lad os opskrive de løsninger til ligningen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ som angives i (A.19), altså

$$\mathbf{x}_k(t) = e^{\lambda_k t}\mathbf{v}_k, \; k = 1, \ldots, K. \tag{A.20}$$

Vi skal nu vise at løsningerne i (A.20) er lineært uafhængige. Vi skal altså vise, at hvis

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_K\mathbf{x}_K(t) = \mathbf{0}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad (A.21)$$

så er $c_1 = c_2 = \cdots = c_K = 0$. Men hvis (A.21) er opfyldt, ses ved indsættelse af udtrykket for funktionerne $\mathbf{x}_k$ at

$$c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_K e^{\lambda_K t}\mathbf{v}_K = \mathbf{0}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ved at sætte $t = 0$ ses at så er

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_K\mathbf{v}_K = \mathbf{0}.$$

Men da vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_K$ er antaget at være lineært uafhængige, kan vi nu slutte at $c_1 = c_2 = \cdots = c_K = 0$, som ønsket. □

Det næste resultat viser hvorledes man for visse sæt af komplekse lineært uafhængige vektorer kan konstruere et sæt reelle lineært uafhængige vektorer. Som vi skal se er dette resultat den centrale ingrediens i processen med at konstruere reelle løsninger til et differentialligningssystem ud fra givne komplekse løsninger. Angående beviset henvises til opgave 912.

**Lemma A.15** *Lad $V$ betegne et komplekst vektorrum. Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, og antag at vektorerne*

$$\mathbf{w}_1 := \mathbf{u} + i\mathbf{v}, \qquad \mathbf{w}_2 := \mathbf{u} - i\mathbf{v} \qquad (A.22)$$

*er lineært uafhængige. Så gælder følgende:*

*(i) Vektorerne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uafhængige.*

*(ii) Lad $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_K$ være vektorer i $V$ og antag at*

$$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_K$$

*er lineært uafhængige. Så er vektorerne*

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_K$$

*også lineært uafhængige.*

Udtrykt i ord siger lemmaet følgende:

(i) Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er givne vektorer med den egenskab at vektorerne $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ i (A.22) er lineært uafhængige, så er vektorerne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ selv lineært uafhængige;

(ii) Hvis vektorerne $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ i (A.22) indgår i et sæt lineært uafhængige vektorer $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_K$, så fås igen et sæt lineært uafhænige vektorer hvis $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ erstattes af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Lad os forklare hvilken rolle lemma A.15 spiller i forbindelse med at finde reelle og lineært uafhængige løsninger til ligningen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Lad

$\lambda = a + i\omega$ være en kompleks egenværdi for matricen $\mathbf{A}$, med tilhørende egentlig egenvektor $\mathbf{v}$. Ligningen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ har da løsningen (A.19). Ved at dele vektoren $\mathbf{v}$ op i en realdel og en imaginærdel, $\mathbf{v} = \operatorname{Re}\mathbf{v} + i \operatorname{Im}\mathbf{v}$, kan løsningen skrives som

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{(a+i\omega)t} \left(\operatorname{Re}\mathbf{v} + i \operatorname{Im}\mathbf{v}\right). \tag{A.23}$$

Vi ved at også $a - i\omega$ er en egenværdi for matricen $\mathbf{A}$, med egentlig egenvektor $\operatorname{Re}\mathbf{v} - i \operatorname{Im}\mathbf{v}$. Derfor har ligningen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ også løsningen

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{(a-i\omega)t} \left(\operatorname{Re}\mathbf{v} - i \operatorname{Im}\mathbf{v}\right). \tag{A.24}$$

Vi ved fra sætning 2.3 at de to løsninger $\mathbf{x}_1(t)$ og $\mathbf{x}_2(t)$ er lineært uafhængige. Ved at udregne de to løsninger $\mathbf{x}_1(t)$ og $\mathbf{x}_2(t)$ viser det sig at vi netop får to komplekse udtryk frem, som har den form vektorerne $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ har i (A.22). Derfor kan vi via lemma A.15 konkludere at de funktioner vi får ved at uddrage realdelen og imaginærdelen af $\mathbf{x}_1(t)$ vil være lineært uafhængige. Dette er netop udsagnet i sætning 2.6(b).

Lemmaets anden del indgår på tilsvarende vis i sætning 2.10(b), hvor den fuldstændige løsning til ligningen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ beskrives. Her indgår vektorerne $\mathbf{x}_1(t)$ og $\mathbf{x}_2(t)$ blandt en række af lineært uafhængige løsninger til differentialligningen. Lemma A.15 fortæller os igen, at når $\mathbf{x}_1(t)$ og $\mathbf{x}_2(t)$ erstattes af realdelen og imaginærdelen af $\mathbf{x}_1(t)$, så fås atter et sæt lineært uafhængige funktioner. Vi kan altså skridtvis erstatte hvert par af komplekse løsninger med et sæt reelle løsninger, og på den måde til slut ende med at have en samling reelle og lineært uafhængige løsninger.

Ovenstående beskriver hvilken rolle lemma A.15 spiller. De konkrete udregninger i forbindelse med løsningerne $\mathbf{x}_1(t)$ og $\mathbf{x}_2(t)$ er overladt til læseren i opgave 914.

## A.5 Stabilitet

I dette afsnit vil vi give et detaljeret bevis for sætning 2.34 i nogle specialtilfælde. Herefter betragtes det fulde bevis.

Betragt en vektorfunktion

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ t \in [t_0, \infty[.$$

Vi har i (2.42) indført betegnelsen

$$||\mathbf{x}(t)|| := \sqrt{|x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2 + \cdots + |x_n(t)|^2}.$$

Bemærk at $||\mathbf{x}(t)||$ angiver længden af vektoren $\mathbf{x}(t)$ som funktion af $t$. Mere generelt kan vi betragte en vilkårlig vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix},$$

og skrive længden som

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$

Man kan vise at $||\cdot||$ har følgende to egenskaber:

(i) (Trekantsuligheden) For vilkårlige vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ er

$$||\mathbf{a} + \mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||. \tag{A.25}$$

(ii) For en given skalar $c \in \mathbb{C}$ og en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ er

$$||c\,\mathbf{a}|| = |c|\,||\mathbf{a}||. \tag{A.26}$$

Vi vil nu betragte det homogene differentialligningssystem i (2.41),

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),\ t \in [t_0, \infty[. \tag{A.27}$$

Hvis $\lambda$ er en reel egenværdi for $\mathbf{A}$, med egentlig egenvektor $\mathbf{v}$, fås som bekendt løsningen $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ til (A.27).

**Lemma A.16** *Antag at $\lambda$ er en reel egenværdi for $\mathbf{A}$, med egentlig egenvektor $\mathbf{v}$. Så er løsningen $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ begrænset hvis og kun hvis $\lambda \leq 0$.*

**Bevis:** Ved brug af regnereglerne for $||\cdot||$ ses at

$$||\mathbf{x}(t)|| = ||e^{\lambda t}\mathbf{v}|| = e^{\lambda t}||\mathbf{v}||. \tag{A.28}$$

Ifølge definitionen på at $\mathbf{x}(t)$ er begrænset skal der findes et tal $K$ således at

$$||\mathbf{x}(t)|| \leq K,\ \forall\, t \in [t_0, \infty[,$$

dvs. således at

$$e^{\lambda t}||\mathbf{v}|| \leq K,\ \forall\, t \in [t_0, \infty[.$$

Et sådant tal $K$ findes hvis og kun hvis $\lambda \leq 0$ : hvis $\lambda > 0$ får vi nemlig at $e^{\lambda t} \to \infty$ for $t \to \infty$, og dermed en ubegrænset løsning. □

**Lemma A.17** *Antag at systemmatricen $\mathbf{A}$ har $n$ forskellige reelle egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Så er systemet* (A.27) *stabilt hvis og kun hvis $\lambda_k \leq 0$ for alle $k = 1, \ldots, n$.*

**Bevis:** Antag først at (A.27) er stabilt. Per definition betyder det at alle løsninger er begrænsede. Lader vi nu $\mathbf{v}_k$ betegne en egentlig egenvektor hørende til egenværdien $\lambda_k$, ved vi at $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_k t}\mathbf{v}_k$ er en løsning til (A.27). Ifølge lemma A.16 kan vi nu slutte at $\lambda_k \leq 0$, som ønsket.

Antag nu at $\lambda_k \leq 0$ for $k = 1, \ldots, n$. Vi skal så vise at enhver løsning er begrænset. Lad igen $\mathbf{v}_k$ betegne en egentlig egenvektor hørende til egenværdien $\lambda_k$. En vilkårlig løsning har formen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n,$$

hvor $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Ved brug af vores regneregler for $||\cdot||$ ses at

$$\begin{aligned}
||\mathbf{x}(t)|| &= ||c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n|| \\
&\leq ||c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1|| + ||c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \cdots + ||c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n|| \\
&= |c_1 e^{\lambda_1 t}|\,||\mathbf{v}_1|| + |c_2 e^{\lambda_2 t}|\,||\mathbf{v}_2|| + \cdots + |c_n e^{\lambda_n t}|\,||\mathbf{v}_n|| \\
&= |c_1|\,e^{\lambda_1 t}\,||\mathbf{v}_1|| + |c_2|\,e^{\lambda_2 t}\,||\mathbf{v}_2|| + \cdots + |c_n|\,e^{\lambda_n t}\,||\mathbf{v}_n||.
\end{aligned}$$

Idet $\lambda_k \leq 0$ gælder at $e^{\lambda_k t} \leq e^{\lambda_k t_0}$ for alle $t \geq t_0$. Dermed viser udregningen at

$$||\mathbf{x}(t)|| \leq |c_1|\,e^{\lambda_1 t_0}\,||\mathbf{v}_1|| + |c_2|\,e^{\lambda_2 t_0}\,||\mathbf{v}_2|| + \cdots + |c_n|\,e^{\lambda_n t_0}\,||\mathbf{v}_n||$$

for alle $t \geq t_0$, og dermed at $\mathbf{x}(t)$ er begrænset. □

Hvis $\lambda = a + i\omega$ er en *kompleks* egenværdi med egenvektor $\mathbf{v}$, har differentialligningssystemet (A.27) løsningen

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{at}e^{i\omega t}\mathbf{v}.$$

I dette tilfælde ses at

$$\begin{aligned}
||\mathbf{x}(t)|| = ||e^{at}e^{i\omega t}\mathbf{v}|| &= |e^{at}e^{i\omega t}|\,||\mathbf{v}|| \\
&= e^{at}\,||\mathbf{v}||.
\end{aligned}$$

Dette er helt parallellt til resultatet i (A.28) i det reelle tilfælde, blot med $\lambda$ erstattet af $a = \mathrm{Re}\,(\lambda)$. Alle argumenterne i beviset for lemma A.17 kan nu gennemføres med $\lambda$ erstattet af $\mathrm{Re}\,(\lambda)$, og vi opnår følgende:

**Lemma A.18** *Antag at systemmatricen* $\mathbf{A}$ *har* $n$ *forskellige egenværdier* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Så er systemet* (A.27) *stabilt hvis og kun hvis* $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) \leq 0$ *for alle* $k = 1, \ldots, n$.

Det afgørende spørgsmål er nu hvordan stabilitet kan karakteriseres hvis der optrædder rødder med multiplicitet. Antag at $\lambda$ er rod med algebtraisk multiplicitet $p$. Hvis den geometriske multiplicitet er $q = p$, kan vi finde lineært uafhængige vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ således at

$$e^{\lambda t}\mathbf{v}_1, \ldots, e^{\lambda t}\mathbf{v}_p$$

er lineært uafhængige løsninger til ligningen. Derfor kan ovenstående argumenter overtages uændret, og man får:

**Lemma A.19** *Antag at der for enhver egenværdi* $\lambda_k$ *til systemmatricen* $\mathbf{A}$ *gælder at den algebraiske multiplicitet og den geometriske multiplicitet stemmer overens,* $p = q$. *Så er systemet* (A.27) *stabilt hvis og kun hvis* $\text{Re}\,(\lambda_k) \leq 0$ *for alle* $k$.

Det resterende spørgsmål vedrører det tilfælde hvor der findes en egenværdi $\lambda$ for hvilken den geometriske multiplicitet er mindre end den algebraiske multiplicitet, $q < p$. Ifølge sætning 2.10 får man i dette tilfælde også løsninger af formen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_{21}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{22}te^{\lambda t}. \tag{A.29}$$

Her er $\mathbf{b}_{21}$ og $\mathbf{b}_{22}$ egentlige vektorer. For at løsninger af denne type er begrænsede er det *ikke* nok at $\text{Re}\,(\lambda) \leq 0$! Hvis f.eks. $\lambda = 0$ fås

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}_{21}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{22}te^{\lambda t} \\ &= \mathbf{b}_{21} + \mathbf{b}_{22}t,\end{aligned}$$

som ikke er begrænset. For at løsningen i (A.29) skal være begrænset må vi kræve at $\text{Re}\,(\lambda) < 0$. Som forklaret i beviset for sætning 2.34 er denne betingelse tilstrækkelig til at garantere stabiliteten.

**Fuldt bevis for sætning 2.34:** Hvis (A.27) er stabilt kan ingen egenværdi $\lambda$ have positiv realdel – ellers havde den tilhørende løsning $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ i sætning 2.3 været ubegrænset. Hvis $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, er en egenværdi med realdel nul, så må den algebraiske multiplicitet $p$ og den geometriske multiplicitet $q$ være ens: hvis $q < p$, så havde vi jo ifølge sætning 2.10 haft en løsning til differentialligningen af formen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_{21}e^{i\omega t} + \mathbf{b}_{22}te^{i\omega t}.$$

Denne løsning er ubegrænset: vektoren $\mathbf{b}_{22}$ er nemlig nødvendigvis forskellig fra nulvektoren fordi løsningerne $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ i sætning 2.10 er lineært uafhængige. Omvendt, hvis (i) og (ii) er opfyldt, så har løsningsrummet til (A.27) en basis bestående af funktioner af formen $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$, hvor $\lambda$ har negativ realdel eller er rent imaginær. Da funktionerne i basen er begrænsede, er enhver løsning begrænset. Dermed er systemet (A.27) stabilt. $\square$

## A.6 Taylors sætning

**Bevis for sætning 4.13**: Lad $x_0 \in I$. Ifølge Taylors formel findes for ethvert $x \in I$ og $N \in \mathbb{N}$ et $\xi$ mellem $x$ og $x_0$ således at

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| &= |f(x) - P_N(x)| \\ &= \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1} \right| \\ &= \frac{\left| f^{(N+1)}(\xi) \right|}{(N+1)!} |x-x_0|^{N+1}. \end{aligned}$$

Resultatet i (4.11) følger nu af antagelsen (4.10).

Når $I$ antages at være et begrænset interval kan vi finde en konstant $k > 0$ således at $|x - x_0| \leq k$ for alle $x \in I$. Derfor følger det af (4.11) at

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \leq \frac{C}{(N+1)!} k^{N+1}$$

for alle $x \in I$. Da

$$\frac{k^{N+1}}{(N+1)!} \to 0 \text{ for } N \to \infty$$

(overvej dette!) opnår vi at (4.12) holder når blot $N_0$ vælges tilstrækkelig stor. □

## A.7 Konvergenskriterier for uendelige rækker

**Bevis for sætning 4.27:** Lad os først antage at leddene $a_n$ er reelle. Betragt nu rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, hvor $c_n = a_n + |a_n|$. Vi bemærker, at

$$0 \leq c_n \leq 2|a_n|;$$

da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er antaget at være konvergent kan vi nu via sammenligningskriteriet slutte at også $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergent. Idet $a_n = c_n - |a_n|$ er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ således en differens mellem to konvergente rækker, og dermed selv konvergent ifølge lemma 4.17. Tilfældet, hvor nogle af leddene $a_n$ er komplekse, følger af det reelle tilfælde ved at udnytte at der for et vilkårligt komplekst tal $a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$, gælder at

$$|a| \leq |a + ib|, \ |b| \leq |a + ib|;$$

heraf følger jo, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ er (absolut) konvergente, og dermed at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent ifølge lemma 4.17.

Vi mangler nu blot at bevise uligheden (4.27). Hertil bemærkes, at der ifølge trekantsuligheden for et vilkårligt $N \in \mathbb{N}$ gælder at

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| &= |a_1 + a_2 + \cdots + a_N| \\ &\le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_N| \\ &= \sum_{n=1}^{N} |a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.\end{aligned}$$

Resultatet følger nu ved at lade $N \to \infty$. □

**Bevis for sætning 4.30:** Antag først at (4.29) er opfyldt med $C < 1$. Så findes et $d \in ]0,1[$ således at $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le d$ for store værdier af $n$, lad os sige for alle $n \ge N$. Når vi så betragter et $n > N$ er

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left|\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \, \frac{a_{N+1}}{a_N} \, a_N\right| \\ &= \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \cdot |a_N| \\ &\le d \cdot d \cdots d \cdot |a_N| \\ &= d^{n-N} \, |a_N| \\ &= d^n \, \frac{|a_N|}{d^N}.\end{aligned}$$

Rækken $\sum d^n$ er konvergent ifølge sætning 5.2; da $\frac{|a_N|}{d^N}$ blot er en konstant følger det at rækken $\sum_{n=N}^{\infty} d^n \, \frac{|a_N|}{d^N}$ også er konvergent. Ved at anvende sætning 4.20(i) sluttes at også $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

Vi betragter nu tilfældet $C > 1$. Her er $|a_{n+1}| > |a_n|$ for tilstrækkelig store værdier af $n$; men det betyder jo at talfølgen

$$|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|, \cdots$$

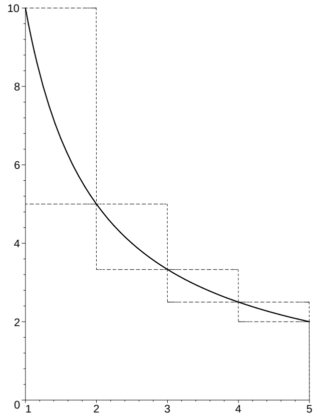
er voksende fra et vist trin at regne, og dermed kan $a_n$ ikke gå mod 0 for $n \to \infty$. Ifølge $n$'te ledskriteriet er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dermed divergent. □

**Bevis for sætning 4.33:** Betragt figur A.20. For hvert $N \in \mathbb{N}$ er

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = f(2) + \cdots + f(N) \le \int_1^N f(x)dx.$$

Hvis vi antager at $\int_1^t f(x)dx$ har en endelig grænseværdi for $t \to \infty$, så følger det ved at lade $N \to \infty$ at

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x)dx.$$




**Figur A.20** *Graf for en aftagende funktion* $f(x), x \in [1,5]$. *Vi ser at* $\sum_{n=1}^{4} f(n)$ *er en oversum for integralet* $\int_1^5 f(x)dx$, *og at* $\sum_{n=2}^{5} f(n)$ *er en undersum.*

Talfølgen $\sum_{n=2}^{N} f(n)$ er således voksende og opadtil begrænset, og dermed konvergent ifølge lemma A.3. Vi slutter, at

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx$$

(det kræver et lille ekstra argument at der også gælder skarpt ulighedstegn i grænsen). Så

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Tilsvarende ses at

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(N) \geq \int_1^{N+1} f(x)dx, \qquad \text{(A.30)}$$

så

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Dette afslutter beviset for (i); til slut bemærkes, at (ii) følger af (A.30). □

**Bevis for sætning 4.38:** Lad som sædvanlig $S_N$ betegne den $N$'te afsnitssum,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + \cdots + (-1)^{N-1} b_N.$$

Vi vil vise, at $S_N$ har en grænseværdi for $N \to \infty$. Rent teknisk vil det foregå ved at vise, at delfølgerne $S_{2N}$ og $S_{2N-1}$ begge har grænseværdier for $N \to \infty$, og at disse grænseværdier stemmer overens.

Først bemærkes, at for ethvert $N \in \mathbb{N}$ er

$$S_{2N} = S_{2N-1} + (-1)^{2N-1} b_{2N} = S_{2N-1} - b_{2N}; \tag{A.31}$$

altså er

$$S_{2N} \leq S_{2N-1}. \tag{A.32}$$

Tilsvarende vises, at

$$S_{2N+1} \geq S_{2N}. \tag{A.33}$$

Vi kan også relatere $S_{2N+1}$ og $S_{2N-1}$:

$$\begin{aligned} S_{2N+1} &= S_{2N-1} + (-1)^{2N-1} b_{2N} + (-1)^{2N} b_{2N+1} \\ &= S_{2N-1} + (b_{2N+1} - b_{2N}); \end{aligned}$$

da følgen $b_n$ er aftagende er $b_{2N+1} \leq b_{2N}$, så vi slutter at

$$S_{2N+1} \leq S_{2N-1}.$$

Vi bemærker endvidere, at $S_{2N+1} \geq 0$ for alle $N \in \mathbb{N}$; thi

$$\begin{aligned} S_{2N+1} &= \sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^{n-1} b_n \\ &= b_1 - b_2 + \cdots + (-1)^{2N} b_{2N+1} \\ &= (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2N-1} - b_{2N}) + b_{2N+1}, \end{aligned}$$

hvilket er en sum af rent positive led (paranteser). Alt i alt har vi nu vist, at

$$S_1 \geq S_3 \geq S_5 \cdots \geq 0.$$

Talfølgen $\{S_{2N-1}\}_{N=1}^{\infty}$ er således aftagende og nedadtil begrænset, og dermed konvergent ifølge lemma A.3. Bemærk nu, at ifølge (A.31) er

$$S_{2N} = S_{2N-1} - b_{2N};$$

da vi pr. antagelse ved at $\lim_{N\to\infty} b_{2N} = 0$, så kan vi konkludere at også $\lim_{N\to\infty} S_{2N}$ eksisterer, og at

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N-1} = \lim_{N\to\infty} (S_{2N} + b_{2N}) = \lim_{N\to\infty} S_{2N}.$$

Hermed er det vist, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

er konvergent. Det ses nu, at

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}b_n\right| \\
= &\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n\right| \\
= &\left|(-1)^N b_{N+1} + (-1)^{N+1}b_{N+2} + (-1)^{N+3}b_{N+3} - \cdots\right| \\
= &\left|b_{N+1} - b_{N+2} + b_{N+3} - \cdots\right| \\
= &\left|(b_{N+1} - b_{N+2}) + (b_{N+3} - b_{N+4}) + \cdots\right| \quad \text{(sum af positive led)} \\
= &(b_{N+1} - b_{N+2}) + (b_{N+3} - b_{N+4}) + \cdots \\
= &b_{N+1} - (b_{N+2} - b_{N+3}) - (b_{N+4} - b_{N+5}) - \cdots \\
\leq &b_{N+1};
\end{aligned}$$

ved det sidste ulighedstegn blev det atter brugt, at $b_n \geq b_{n+1}$ for alle $n$.□

## A.8 Potensrækker og generelle uendelige rækker

**Bevis for sætning 5.13:** Lad os bevise sætningen under den (overflødige) antagelse at

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to C \in [0, \infty] \text{ for } n \to \infty. \tag{A.34}$$

Først bemærkes, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ under alle omstændigheder er konvergent for $x = 0$. Vi vil derfor i alle de følgende regninger antage at $x \neq 0$. Vi vil anvende kvotientkriteriet på rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Betragt nu en fast værdi for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ved at bruge antagelsen (A.34) fås at

$$\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| \to C\ |x| \text{ for } n \to \infty. \tag{A.35}$$

Vi deler nu beviset op i tre tilfælde. Hvis $C = 0$, så ses at

$$\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Ifølge kvotientkriteriet gælder da at $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ er absolut konvergent; da $x$ var vilkårligt valgt er rækken altså absolut konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$.

Hvis $C = \infty$, så vil

$$\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| \to \infty \text{ for } n \to \infty.$$

Derfor er $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ divergent for $x \neq 0$ ifølge kvotientkriteriet.

Hvis nu $C \in ]0, \infty[$, så følger det af (A.35) samt kvotientkriteriet at $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ er absolut konvergent når $C\,|x| < 1$, altså når $|x| < \frac{1}{C}$, og divergent når $|x| > \frac{1}{C}$. □

**Bevis for sætning 5.17:** Lad os antage, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradius $\rho > 0$. Så kan vi betragte funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \;\; x \in ]-\rho, \rho[.$$

For at undgå rent tekniske komplikationer vil vi antage, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$$

eksisterer, og er et tal i intervallet $]0, \infty[$. Vi bemærker, at ifølge kvotientkriteriet er

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}}.$$

Ved hjælp af kvotientkriteriet ses, at også at den ledvist differentierede række, altså

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \tag{A.36}$$

har konvergensradius $\rho$. Lad os nu betragte et vilkårligt, men fast, $x \in ]-\rho, \rho[$. Ved at vælge et tal $r$ således at $|x| < r < \rho$ opnår vi at

$$x \in ]-r, r[ \subset ]-\rho, \rho[.$$

På intervallet $[-r, r]$ har rækken i (A.36) den konvergente majorantrække $\sum_{n=1}^{\infty} \left| n c_n r^{n-1} \right|$. Konklusionen følger nu af sætning 5.35. □

**Bevis for sætning 5.33:** Lad $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ være en konvergent majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in I$. Da $|f_n(x)| \leq k_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \in I$ viser sammenligningskriteriet at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er (absolut) konvergent for alle $x \in I$. Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in I$$

er således veldefineret. Vi viser nu at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent. Til det formål betragter vi et givet $\epsilon > 0$ og vælger $N_0 \in \mathbb{N}$ således at

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} k_n \leq \epsilon.$$

For alle $N \geq N_0$ og alle $x \in I$ gælder hermed, at

$$\begin{aligned}\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} k_n \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Bemærk, at vi undervejs brugte uligheden (4.27). Hermed er det vist, at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent.

For at vise at $f$ er kontinuert i et vilkårligt $x_0 \in I$ betragtes igen et $\epsilon > 0$. Vi skal vise, at der findes et $\delta > 0$ således at $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ når blot $|x - x_0| \leq \delta$. Til det formål vælges $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ for alle } x \in I.$$

Så viser trekantsuligheden, at

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - S_N(x) + S_N(x) - S_N(x_0) + S_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + |S_N(x) - S_N(x_0)|.\end{aligned}$$

Da afsnitssummen $S_N$ er kontinuert (det er en endelig sum af kontinuerte funktioner) kan vi finde $\delta > 0$ således at $|S_N(x) - S_N(x_0)| \leq \epsilon/3$ når blot $|x - x_0| \leq \delta$. Med dette $\delta$ viser ovenstående udregning, at når blot $|x - x_0| \leq \delta$, så er

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\epsilon}{3} + |S_N(x) - S_N(x_0)| \leq \epsilon. \qquad \square$$

**Bevis for sætning 5.34:** Kontinuiteten af funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

er vist allerede i sætning 5.33. I det følgende antages at $a < b$; tilfældet $a > b$ følger ved et fortegnsskift. Vi skal vise, at

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n(x)dx,$$

dvs. at

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b S_N(x)dx. \tag{A.37}$$

Givet $\epsilon > 0$ kan vi ifølge sætninge 5.33 finde et $N_0 \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{\epsilon}{b-a} \text{ for alle } x \in I, N > N_0.$$

Heraf følger, at for $N > N_0$ er

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b S_N(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - S_N(x))dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - S_N(x)|\, dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\, dx = \epsilon. \end{aligned}$$

Pr. definition af grænseværdi har vi hermed vist (A.37). □

**Bevis for sætning 5.35:** Vi skal vise, at funktionen $f$ er differentiabel i et vilkårligt givet $x \in I$. Som "hjælpepunkt" betragter vi endvidere et $x_0 \in I$, som vælges én gang for alle.

Betragt funktionen

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x),$$

der ifølge sætning 5.33 er både veldefineret og kontinuert. Vi kan nu bruge sætning 5.34 til at slutte, at der for ethvert $x \in I$ gælder at

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x g(t)dt = \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f_n'(t)dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \\ &= f(x) - f(x_0). \end{aligned}$$

Heraf følger, at funktionen $f$ er differentiabel i $x$, og at

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$ □

## A.9 Fouriers sætning

Formålet med dette afsnit er at bevise Fouriers sætning om punktvis konvergens af Fourierrækker. Vi vil først foretage nogle små ændringer i forhold

til sætning 6.12. Først og fremmest er det af notationsmæssige grunde nemmere at vise sætningen for Fourierrækken på kompleks form. Endvidere indgår betegnelsen $x$ i alle de definitioner vi har mødt i Fourierrækketeorien, bl.a. i udtrykket for Fourierkoefficienterne. Derfor er det en fordel at benytte et andet bogstav end $x$ når vi skal bevise Fouriers sætning. Med disse ændringer er vores mål altså at bevise følgende:

**Sætning A.21 (Fouriers sætning)** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Så konvergerer Fourierrækken for $f$ punktvis for alle $u \in \mathbb{R}$. For summen af Fourierrækken gælder følgende:*

*(i) Hvis $u$ er et punkt hvori $f$ er kontinuert, så er*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inu} = f(u). \tag{A.38}$$

*(ii) Hvis $u$ er et punkt hvori $f$ er diskontinuert, så er*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inu} = \frac{f(u^+) + f(u^-)}{2}. \tag{A.39}$$

Beviset for Fouriers sætning er langt og kompliceret, så vi deler det op i en række mindre skridt.

Vi vil betegne den $N'$te afsnitssum af Fourierrækken for funktionen $f$ med

$$(S_N f)(u) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inu}, \tag{A.40}$$

hvor vi husker at Fourierkoefficienterne er givet ved

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx. \tag{A.41}$$

Bemærk at vi normalt har benyttet $S_N(u)$ som betegnelse for den $N$'te afsnitssum. Vi vil i beviserne i dette afsnit få brug for Fourierrækkerne for flere funktioner end blot $f$, og derfor er det nødvendigt at vi i denne sammenhæng indfører det ekstra $f$ i notationen for at gøre det klart at det er funktionen $f$ vi betragter.

Den præcise betydning af (A.38) er at

$$(S_N f)(u) \to f(u) \text{ for } N \to \infty. \tag{A.42}$$

Vores strategi er først at vise (A.42) i et specialtilfælde, og herefter at udlede mere og mere generelle versioner indtil vi ender med et fuldstændigt bevis. Vi vil starte med følgende delmål.

**Delmål:** Vi vil vise Fouriers sætning for $u = 0$, under de ekstra antagelser at

(a) $f$ er differentiabel i $u = 0$;

(b) $f(0) = 0$.

Vi ønsker altså at vise at disse antagelser implicerer at

$$(S_N f)(0) \to 0 \text{ for } N \to \infty.$$

Til det formål har vi brug for at beregne funktionsværdien $(S_N f)(0)$. Vi vil udlede et udtryk for $(S_N f)(0)$ i lemma A.24, men dette udtryk involverer en funktion $g$, som vi derfor introducerer efter den følgende definition.

**Definition A.22** *En $2\pi$-periodisk funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er stykkevis kontinuert hvis følgende to begingelser er opfyldt:*

*(i) $f$ er kontinuert på intervallet $[-\pi, \pi]$ pånær muligvis i et endeligt antal punkter $x_0, \ldots, x_n$;*

*(ii) i et punkt $x_j$ hvor $f$ ikke er kontinuert, kræves endvidere at grænseværdierne $f(x_j^+)$ og $f(x_j^-)$ eksisterer.*

**Lemma A.23** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Antag endvidere at $f(0) = 0$, og at $f$ er differentiabel i $u = 0$. Betragt funktionen*

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{e^{-ix} - 1}, & x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}; \\ if'(0), & x = 0. \end{cases} \tag{A.43}$$

*Så gælder følgende:*

*(i) $f(x) = g(x)\,\overline{e^{ix} - 1}, \ \forall x \in [-\pi, \pi]$.*

*(ii) $g$ er stykkevis kontinuert, og $g \in L^2(-\pi, \pi)$.*

**Bevis:** Vi bemærker først at for $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ er $e^{-ix} - 1 \neq 0$. Derfor er funktionen $g$ veldefineret.

For $x = 0$ er $e^{ix} - 1 = 1 - 1 = 0$ og $f(x) = 0$ per antagelse, så (i) er opfyldt. For $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ følger (i) umiddelbart af definitionen af funktionen $g$.

Det er endnu uklart hvordan funktionen $g$ opfører sig i $x = 0$; men for alle $x \neq 0$ gælder, at hvis $f$ er kontinuert i $x$, så er $g$ også kontinuert i $x$. Endvidere gælder at hvis $x \neq 0$ er et diskontinuitetspunkt for $f$ og $f$ har grænseværdier fra højre og venstre i $x$, så har også $g$ grænseværdier fra højre og venstre i $x$, For at bevise (ii) er det således tilstrækkeligt at vise at $g$ har grænseværdier for $x$ gående mod 0 fra højre og fra venstre. Vi vil vise at der endda gælder at $g$ er kontinuert i 0. Idet $f(0) = 0$ kan vi skrive

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{-ix} - 1} = \frac{f(x) - f(0)}{e^{-ix} - 1} = \frac{f(x) - f(0)}{x} \left( \frac{e^{-ix} - 1}{x} \right)^{-1}. \tag{A.44}$$

Bemærk at leddet $\frac{e^{-ix}-1}{x}$ er en differenskvotient for funktionen $e^{-ix}$ i punktet $u = 0$. Når $x \to 0$ fås dermed at

$$\frac{e^{-ix}-1}{x} \to \frac{d\,e^{-ix}}{dx}(0) = -i.$$

Tilsvarende er leddet $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ en differenskvotient for funktionen $f$ i punktet $u = 0$. Det ses derfor at for $x \to 0$ vil

$$g(x) \to f'(0)\left(\frac{d\,e^{-ix}}{dx}(0)\right)^{-1} = if'(0) = g(0). \tag{A.45}$$

Hermed har vi vist at $g$ er kontinuert i $x = 0$, og beviset er afsluttet. □

Vi er nu klar til at udlede det annoncerede udtryk for $(S_N f)(0)$, dog kun under de nævnte ekstra antagelser.

**Lemma A.24** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Antag endvidere at*

*(a) $f$ er differentiabel i $u = 0$;*

*(b) $f(0) = 0$.*

*Lad $g$ være givet ved* (A.43). *Så gælder for ethvert $N \in \mathbb{N}$ at*

$$(S_N f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-i(N+1)x}\, dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{iNx}\, dx. \tag{A.46}$$

**Bevis:** Ifølge definitionen (A.40) og (A.41) er

$$\begin{aligned}(S_N f)(0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=-N}^{N} e^{-inx}\, dx. \end{aligned} \tag{A.47}$$

Vi kan omforme leddet $\sum_{n=-N}^{N} e^{-inx}$ ved først at skifte summationsindeks og herefter at lave det om til en endelig kvotientrække. For $x \in [-\pi, \pi]\setminus\{0\}$ fås

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} e^{-inx} &= \sum_{n=0}^{2N} e^{-i(n-N)x} \\ &= e^{iNx}\sum_{n=0}^{2N} e^{-inx} \\ &= e^{iNx}\sum_{n=0}^{2N} \left(e^{-ix}\right)^n. \end{aligned}$$

Ved brug af formlen (5.4) (med $x$ erstattet af $e^{-ix}$ og $N$ erstattet af $2N$) følger det nu at

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} e^{-inx} &= e^{iNx}\,\frac{1-e^{-i(2N+1)x}}{1-e^{-ix}} \\ &= \frac{e^{iNx}-e^{-i(N+1)x}}{1-e^{-ix}}.\end{aligned}$$

Det følger nu at for $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ er

$$\begin{aligned}f(x)\sum_{n=-N}^{N} e^{-inx} &= f(x)\,\frac{e^{iNx}-e^{-i(N+1)x}}{1-e^{-ix}} \\ &= g(x)\left(e^{-i(N+1)x}-e^{iNx}\right). \qquad \text{(A.48)}\end{aligned}$$

Det udledte udtryk gælder også for $x = 0$ fordi $f(0) = 0$. Dermed fås via (A.47) at

$$\begin{aligned}(S_N f)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\left(e^{-i(N+1)x}-e^{iNx}\right)dx, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,e^{-i(N+1)x}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,e^{iNx}\,dx,\end{aligned}$$

som ønsket. □

Med lemma A.24 til rådighed kan vi nu opnå den første delkonklusion:

**Proposition A.25** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Antag endvidere at*

*(a) $f$ er differentiabel i $u = 0$;*

*(b) $f(0) = 0$.*

*Så gælder at*

$$(S_N f)(0) \to f(0) = 0 \text{ for } N \to \infty. \qquad \text{(A.49)}$$

**Bevis:** Lad $\{d_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ betegne Fourierkoefficienterne på kompleks form for funktionen $g$. Resultatet i lemma A.24 udtrykker $(S_N f)(0)$ som en differens mellem to Fourierkoefficienter for funktionen $g$, nemlig den $(N+1)$'te og den $(-N)$'te:

$$\begin{aligned}(S_N f)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,e^{-i(N+1)x}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,e^{iNx}\,dx \\ &= d_{N+1} - d_{-N}. \qquad \text{(A.50)}\end{aligned}$$

Ifølge Parsevals sætning (eller se opgave 879) gælder at rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2$ er konvergent; derfor viser $n$'te ledskriteriet at $d_n \to 0$ for $n \to \pm\infty$. Det følger nu af (A.50) at

$$(S_N f)(0) = d_{N+1} - d_{-N} \to 0 \text{ for } N \to \infty,$$

som ønsket. □

Resten af arbejdet med at bevise sætning A.21 består i at generalisere proposition A.25, altså fjerne de ekstra antagelser (a)–(b). Vi har således følgende delmål foran os:

(A) Vi skal undersøge hvad der sker hvis funktionen $f$ ikke er differentiabel i punktet $u = 0$.

(B) Vi skal udvide resultatet til at gælde for andre $u$-værdier.

(C) Vi skal fjerne antagelsen om at funktionsværdien i det betragtede punkt er nul.

Vi starter med at undersøge hvad der sker hvis $f$ ikke er differentiabel i $u = 0$. Vi vil følge proceduren ovenfor, og atter betragte hjælpefunktionen $g$ i (A.43). Bemærk at vi i første omgang må indføre nye antagelser, nemlig (a) og (c) forneden:

**Lemma A.26** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Antag endvidere at*

*(a)* $\dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = f(0)$*;*

*(b)* $f(0) = 0$*;*

*(c)* $f$ *er lige.*

*Betragt funktionen*

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{e^{-ix} - 1}, & x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{A.51}$$

*Så gælder følgende:*

*(i)* $f(x) = g(x)\,\overline{e^{ix} - 1}, \ \forall x \in [-\pi, \pi]$.

*(ii)* $g$ *er stykkevis kontinuert.*

*(iii)* $(S_N f)(0) \to f(0) = 0$ *for* $N \to \infty$.

**Bevis:** Resultatet i (i) følger umiddelbart af definitionen af $g$. For alle $x \neq 0$ gælder argumenterne i beviset for lemma (A.40) uændret, så for at vise (ii) skal vi blot vise at $g$ har grænseværdier for $x$ gående mod 0 fra højre og venstre. Idet $f$ er lige, gælder at

$$f(0^+) = f(0^-),$$

så betingelsen (a) sikrer at $f(0^+) = f(0^-) = f(0)$. Per antagelse er funktionen $f$ stykkevis differentiabel, så funktionen

$$\phi(x) := \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ f(0^+), & x = 0 \end{cases}$$

er differentiabel i 0 fra højre. Men da $f(0^+) = f(0)$, betyder det at funktionen $f$ er differentiabel i 0 fra højre. Derfor kan vi gentage alle argumenterne i (A.44) og (A.45), blot med den forskel at vi lader $x$ være positiv og erstatter $f'(0)$ i (A.45) med den højreafledede i 0. Hermed er det vist at $g$ har en grænseværdi fra højre i 0. Beviset for eksistensen af grænseværdien fra venstre er tilsvarende. Vi kan nu gennemføre det samme bevis som i lemma A.24, så vi opnår igen at $(S_N f)(0)$ er en differens mellem to Fourierkoefficienter for funktionen $g$. Herefter afsluttes beviset nøjagtigt på samme måde som beviset for proposition A.25. □

Vi vil nu skridtvis eliminere antagelserne (a)–(c) i lemma A.26. Ved hjælp af tricket i det følgende lemma slipper vi af med antagelsen om at $f$ er lige.

**Lemma A.27** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Antag endvidere at*

*(a)* $\dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = f(0)$;

*(b)* $f(0) = 0$.

*Så gælder at*

$$(S_N f)(0) \to f(0) = 0 \quad \textit{for } N \to \infty. \tag{A.52}$$

**Bevis:** Definer funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$\phi(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}. \tag{A.53}$$

Så er $\phi$ stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk og opfylder betingelserne (a)–(c) i lemma A.26 (opgave 871). Så

$$(S_N \phi)(0) \to 0 \text{ for } N \to \infty. \tag{A.54}$$

Direkte udregning (opgave 871) viser at der for ethvert $x \in [-\pi, \pi]$ gælder at

$$(S_N \phi)(x) = \frac{(S_N f)(x) + (S_N f)(-x)}{2}.$$

For $x = 0$ fås hermed

$$(S_N \phi)(0) = (S_N f)(0),$$

hvorefter (A.54) viser at

$$(S_N f)(0) \to 0 \text{ for } N \to \infty.$$ □

Som næste skridt vil vi nu fjerne antagelsen om at det betragtede punkt er $u = 0$. Vi vil dog indtil videre fortsat antage at funktionsværdien i det betragtede punkt er nul:

**Proposition A.28** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Lad $u \in [-\pi, \pi]$, og antag at*

*(a)* $\dfrac{f(u^+) + f(u^-)}{2} = f(u)$;

*(b)* $f(u) = 0$.

*Så gælder at*

$$(S_N f)(u) \to f(u) = 0 \quad \textit{for } N \to \infty. \tag{A.55}$$

**Bevis:** Betragt et fast valg for $u$, og definer funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$\phi(x) := f(x + u). \tag{A.56}$$

Funktionen $\phi$ opfylder betingelserne i lemma A.27 (opgave 872), så

$$(S_N \phi)(0) \to 0 \text{ for } N \to \infty.$$

Direkte udregning (opgave 872) viser at afsnitssummen for Fourierrækken for $\phi$ i punktet 0 er givet ved

$$(S_N \phi)(0) = (S_N f)(u),$$

hvilket netop viser at

$$(S_N f)(u) \to 0 \text{ for } N \to \infty.$$

□

Vi vil nu fjerne antagelsen om at funktionsværdien i det betragtede punkt er 0.

**Proposition A.29** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Lad $u \in [-\pi, \pi]$, og antag at*

*(a)* $\dfrac{f(u^+) + f(u^-)}{2} = f(u)$.

*Så gælder at*

$$(S_N f)(u) \to f(u) \quad \textit{for } N \to \infty. \tag{A.57}$$

**Bevis:** Definer funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$\phi(x) := f(x) - f(u). \tag{A.58}$$

Funktionen $\phi$ opfylder betingelserne i proposition A.28 (opgave 873). Derfor vil

$$(S_N \phi)(u) \to 0 \quad \text{for } N \to \infty.$$

Direkte udregning (opgave 873) viser at for alle $x \in [-\pi, \pi]$ er

$$(S_N\phi)(x) = (S_N f)(x) - f(u). \tag{A.59}$$

Med valget $x = u$ fås dermed at

$$(S_N f)(u) = (S_N\phi)(u) + f(u) \to f(u) \quad \text{for } N \to \infty,$$

som ønsket. □

Vi er nu i stand til at vise et resultat, der indeholder hele essensen af Fouriers sætning.

**Proposition A.30** *Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Lad $u \in [-\pi, \pi]$. Så gælder at*

$$(S_N f)(u) \to \frac{f(u^+) + f(u^-)}{2} \quad \textit{for } N \to \infty. \tag{A.60}$$

**Bevis:** Betragt et fast $u \in [-\pi, \pi]$, og definér funktionen $\phi : [-\pi, \pi[ \to \mathbb{C}$ ved

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi, u[\ \cup\ ]u, \pi[, \\ \dfrac{f(u^+) + f(u^-)}{2}, & x = u. \end{cases} \tag{A.61}$$

Vi kan udvide funktionen til en $2\pi$-periodisk funktion på $\mathbb{R}$, som vi også vil betegne med $\phi$. Så opfylder funktionen $\phi$ betingelserne i proposition A.29 (opgave 874). Derfor vil

$$(S_N\phi)(u) \to \phi(u) = \frac{f(u^+) + f(u^-)}{2} \quad \text{for } N \to \infty.$$

Men på intervallet $[-\pi, \pi]$ er funktionerne $\phi$ og $f$ identiske, pånær i et enkelt punkt! Dermed har de samme Fourierkoefficienter, og samme Fourierrække. Altså slutter vi at

$$(S_N f)(u) = (S_N\phi)(u) \to \phi(u) = \frac{f(u^+) + f(u^-)}{2} \quad \text{for } N \to \infty.$$

Hermed er beviset for proposition A.30 afsluttet. □

Efter alle disse forberedelser er vi nu i stand til at gøre beviset for sætning A.21 færdigt.

**Bevis for sætning A.21:** I proposition A.30 har vi ses at (A.39) gælder for ethvert $u \in [-\pi, \pi]$. På grund af periodicitet holder resultatet dermed for alle $u \in \mathbb{R}$. Dermed er (ii) i sætning A.21 bevist. Hvis funktionen $f$ er kontinuert i det betragtede $u$ simplificerer sumudtrukket til det udtryk der angives i (i). □

## A.10 Fourierrækkemetoden

Vi ønsker nu at bevise sætning 7.8. Hertil viser vi først et resultat om differentiation af Fourierrækker.

**Sætning A.31** *Lad $f$ være en $2\pi$-periodisk, kontinuert, og stykkevis differentiabel funktion med Fourierrække*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Fourierrækken for $f'(t)$ er da bestemt ved*

$$f'(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{A.62}$$

**Bevis:** Hvis vi i første omgang betegner Fourierrækken for $f'(t)$ med

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{int},$$

har vi

$$c_n^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{A.63}$$

Ved benyttelse af delvis integration fås herefter

$$c_n^* = \frac{1}{2\pi}\Big[f(t)e^{-int}\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot(-in)e^{-int}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{A.64}$$

Den kantede parentes er nul, da såvel $f(t)$ som $e^{-int}$ er periodisk med perioden $2\pi$. Vi har altså

$$c_n^* = in\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = inc_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

hvilket skulle bevises.

Det skal bemærkes, at vi i beviset uden videre har benyttet reglen om delvis integration, selv om $f(t)$ ikke nødvendigvis er differentiabel i hele intervallet $[0, 2\pi]$. At der ikke herved opstår fejl i (A.64) kan indses ved at skrive integralet i (A.63) som en sum af integraler svarende til, at de punkter, hvori $f(t)$ ikke er differentiabel, er indskudt som delepunkter. For ethvert af disse integraler kan delvis integration umiddelbart anvendes, og (A.64) følger herefter ved at addere de enkelte bidrag. Detaljerne heri overspringes, men det fremhæves, at det kun går godt, fordi $f(t)$ vides at være kontinuert. □

**Bevis for sætning 7.8:** Vi fører beviset for et førsteordens system; beviset i det generelle tilfælde er helt analogt hertil. Lad der altså være givet et

stabilt system

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bu(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{A.65}$$

$$y(t) = dx(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{A.66}$$

og lad $u(t)$ være givet ved (7.20),

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Bemærk, at stabilitetsantagelsen for dette endimensionale system blot betyder at $a < 0$. Som løsning til (A.65) er funktionen $x$ kontinuert, differentiabel, og $2\pi$-periodisk. Den kan derfor fremstilles ved sin Fourierrække,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{A.67}$$

Vi bemærker, at vi endnu ikke kender løsningen $x$, og dermed heller ikke Fourierkoefficienterne $c_n^*$. I de følgende vil vi bestemme disse koefficienter, udtrykt ved Fourierkoefficienterne $c_n$ for funktionen $u$ samt konstanterne $a, b$ og $d$.

Da $u$ er kontinuert og stykkevis differentiabel viser (A.65) endvidere, at den afledte $x'(t)$ er kontinuert og stykkevis differentiabel. Derfor gælder der ifølge Fouriers sætning også lighedstegn i det udtryk vi fandt for Fourierrækken for $x'$ i (A.62):

$$x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n^* e^{int}.$$

Fourierrækken for $\frac{dx}{dt} - ax(t)$ er derfor

$$\frac{dx}{dt} - ax(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (inc_n^* - ac_n^*) e^{int}. \tag{A.68}$$

Ifølge (A.65) er

$$\frac{dx}{dt} - ax(t) = bu(t);$$

ved indsættelse af Fourierrækkerne fås hermed at

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (inc_n^* - ac_n^*) e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} bc_n e^{int}.$$

Ved sammenligning af koefficienterne i de to Fourierrækker ses, at

$$inc_n^* - ac_n^* = bc_n,$$

altså

$$c_n^* = \frac{b}{in - a} c_n,$$

hvorefter indsættelse i (A.66) og (A.67) giver at

$$y(t) = dx(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{db}{in - a} c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{A.69}$$

Overføringsfunktionen for systemet (A.65)–(A.66) er

$$H(s) = -d(a - s)^{-1} b = \frac{db}{s - a},$$

hvorfor (A.69) også kan skrives

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}.$$

Vi har hermed vist, at (7.21) er opfyldt for et system af første orden. Helt analoge argumenter kan benyttes i det generelle tilfælde. □

## A.11 Mere om effekt

Som nævnt i afsnit (6.5) kan vektorrummet $L^2(-\pi, \pi)$ udstyres med det indre produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt, \;\; f, g \in L^2(-\pi, \pi),$$

og den tilhørende norm

$$||f|| = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}. \tag{A.70}$$

Udtrykt ved normen ses at effekten af funktionen $f$ er

$$P(f) = \frac{1}{2\pi} \, ||f||^2. \tag{A.71}$$

Ved brug af definitionen ses, at effekten af en sum af to funktioner $f$ og $g$ er givet ved

$$\begin{aligned} P(f + g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) + g(t)|^2 \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) + g(t)) \, \overline{(f(t) + g(t))} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( |f(t)|^2 + |g(t)|^2 + f(t)\overline{g(t)} + g(t)\overline{f(t)} \right) dt \end{aligned}$$

$$= \quad P(f) + P(g) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt + \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt}$$

$$= \quad P(f) + P(g) + \frac{1}{2\pi}\left(\langle f, g\rangle + \overline{\langle f, g\rangle}\right).$$

Normalt er effekten $P(f+g)$ altså forskellig fra summen $P(f)+P(g)$; men *hvis*

$$\langle f, g\rangle = 0, \tag{A.72}$$

så er

$$P(f+g) = P(f) + P(g).$$

Betingelsen $\langle f, g\rangle = 0$ udtrykkes ved at sige at funktionerne $f$ og $g$ er *ortogonale.* Det følger heraf, at hvis $f_1, f_2, \ldots, f_N$ er en familie af funktioner i $L^2(-\pi, \pi)$ og $\langle f_n, f_m\rangle = 0$ for $m \neq n$, så er

$$P\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(f_n). \tag{A.73}$$

**Bevis for lemma 7.11(ii):** For en given funktion $f$ og en konstant $c$ viser definitionen af effekt at

$$P(cf) = |c|^2 P(f). \tag{A.74}$$

Vi bemærker videre at de komplekse eksponentialfunktioner $f(t) = e^{int}$ og $g(t) = e^{imt}$ opfylder betingelsen (A.72) når $m, n \in \mathbb{Z}$ og $m \neq n$; thi

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \begin{cases} 2\pi \text{ hvis } m = n, \\ 0 \text{ hvis } m \neq n. \end{cases}$$

Dette argument viser også at $P(e^{int}) = 1$. Ved brug af (A.73) og (A.74) ses nu at

$$P(S_N) = P\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\right) = \sum_{n=-N}^{N} P(c_n e^{int}) \quad = \quad \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 P(e^{int})$$

$$= \quad \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2,$$

som ønsket. □

I praksis regnes ofte med normer i stedet for effekter. Ved brug af (A.74) kan sætning (7.12)(i) omformes til

$$\frac{||S_N||}{||f||} \geq \delta \Leftrightarrow \sum_{|n|>N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\,(1-\delta^2)||f||^2.$$

# Bilag B
## Appendiks B

I dette appendiks listes en række vigtige potensrækker og Fourierrækker. En del heraf optræder i bogen, og nævnes her med den samme henvisning.

### B.1 Potensrækker

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ |x| < 1 \tag{5.3}$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n,\ |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \tag{5.10}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1},\ |x| < 1$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R} \tag{5.11}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \ |x| < 1$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \ x \in \mathbb{R}$$

## B.2 Fourierrækker for 2π-periodiske funktioner

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ hvis } x \in ]-\pi, 0[, \\ 0 \text{ hvis } x = 0, x = \pi, \\ 1 \text{ hvis } x \in ]0, \pi[, \end{cases} \quad , \quad f \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x) \qquad (6.13)$$

$$f(x) = x, \ x \in ]-\pi, \pi[: \quad f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \qquad (6.15)$$

$$f(x) = |x|, \ x \in ]-\pi, \pi[: \ f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$$

$$f(x) = x^2, \ x \in ]-\pi, \pi[: \quad f \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{n+1} \cos nx$$

$$f(x) = |\sin x|, \ x \in ]-\pi, \pi[: \quad f \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}$$

# Bilag C
## Appendiks C

I dette appendiks defineres Fourierrækker for generelle $T$-periodiske funktioner, $T > 0$, og de vigtigste resultater nævnes.

### C.1 Fourierrækker for $T$-periodiske funktioner

For et givet tal $T > 0$ sættes $\omega = 2\pi/T$. For en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode $T$, der tilhører vektorrummet

$$L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) := \left\{ f : \quad \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

defineres Fourierrækken ved

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x),$$

hvor

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x \; dx, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

og

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x \; dx, \; n = 1, 2, \ldots \; .$$

Den $N$'te afsnitssum af Fourierrækken er

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x).$$

Svarende til sætning 6.3 haves at

(i) Hvis $f$ er en lige funktion, så er $b_n = 0$ for alle $n$, og

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x \; dx, \;\; n = 0, 1, 2, \dots \;\; .$$

(ii) Hvis $f$ er ulige, så er $a_n = 0$ for alle $n$, og

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\omega x \; dx, \;\; n = 1, 2, \dots \;\; .$$

Fourierrækken for $f$ på kompleks form er

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x},$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Som for $2\pi$-periodiske funktioner er koefficienterne for Fourierrækkerne på reel og kompleks form relaterede via

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}a_0, \text{ og for } n \in \mathbb{N}, \; c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \\ a_0 &= 2c_0, \text{ og for } n \in \mathbb{N}, \; a_n = c_n + c_{-n}, \; b_n = i(c_n - c_{-n}). \end{aligned}$$

Under antagelser svarende til dem vi benyttede i sætning 6.12 gælder, at den maksimale afvigelse mellem $f(x)$ og afsnitssummen $S_N(x)$ kan vurderes ved

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T}{2N}\int_0^T |f'(t)|^2 dt}.$$

Alternativt fås som i sætning 6.17 at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|).$$

Parsevals sætning tager formen

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

# Bilag D
# Maplekompendium

Formålet med dette afsnit er at samle de vigtigste Maplekommandoer der er relaterede til emnerne i denne bog. Der er på ingen måde tale om et komplet beskrivelse.

## D.1 Generelt

### *D.1.1 Dekomposition*

En brøk, hvor tæller og nævner er polynomier kan spaltes op i *stambrøker.* Betragt f.eks.

$$\frac{x^2-11}{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}$$

```
> convert((x^2-11)/(x^4-4*x^3 +7*x^2-12*x+12),parfrac,x);
```

$$\frac{8}{7}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{7}\frac{1+4x}{x^2+3}$$

### *D.1.2 Faktorisering af n-tegradspolynomium*

Som bekendt kan ethvert $n$-tegradspolynomium

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

skrives som et produkt af $n$ førstegradspolynomier:

$$P(\lambda)=a_0(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\cdots(x-x_k)^{p_k}.$$

Betragt for eksempel

$$P(x) = x^2 + x.$$

Faktoriseringen udføres i Maple med kommandoen

```
> factor(x^2+x);
```

$$x(x+1)$$

Hvis polynomiet har komplekse rødder giver kommandoen ikke den fulde opspaltning i førstegradspolynomier. Betragt for eksempel

```
> factor(x^2+1);
```

$$x^2 + 1$$

Her benyttes følgende tilføjelse til kommandoen:

```
> factor(x^2+1, complex);
```

$$(x + I)(x - I)$$

### *D.1.3 Egenværdier og egenvektorer, eksponentialmatrix*

Betragt matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

For at bestemme egenværdierne og de tilhørende egenvektorer gøres følgende.

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> A:=Matrix(3,3,[1,0,0,0,0,1,0,1,0]);
```

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resultatet fortæller at egenværdierne er -1 (med algebraisk multiplicitet 1) og 1 (med algebraisk multiplicitet 2). Følgende kommando giver både egenværdierne og tilhørende egenvektorer:

> Eigenvectors(A);

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultater fortæller at tallet $-1$ er egenværdi med egenvektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

tilsvarende er tallet 1 egenværdi med tilhørende lineært uafhængige egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## D.2 Differentialligninger

### *D.2.1 Løsning af differentialligning*

Vi vil løse

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Først bestemmes den fuldstændige løsning:

```
> L := diff(y(t),t,t)+5*diff(y(t),t)+6*y(t)=0;
```

$$L := \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = 0$$

```
> dsolve(L);
```

$$y(t) = _C1e^{(-3t)} + _C2e^{(-2t)}$$

Bestemmelse af den løsning for hvilken $y(0) = 1, y'(0) = 1$:

> dsolve($\{$L$, y(0) = 1, D(y)(0) = 1\}$);

$$y(t) = -3e^{(-3t)} + 4e^{(-2t)}$$

## D.3 Differentialligningssystemer

### *D.3.1 Løsning af differentialligningssystem*

Vi vil løse systemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = & -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

Først bestemmes den fuldstændige løsning:

```
> eq1 := diff(x1(t),t)=x1(t)+2*x2(t);
```

$$eq1 := \frac{d}{dt}x1(t) = x1(t) + 2x2(t)$$

```
> eq2 := diff(x2(t),t)=-2*x1(t)-x2(t);
```

$$eq2 := \frac{d}{dt}x2(t) = -2x1(t) - x2(t)$$

```
> dsolve({eq1,eq2});
```

$$\begin{aligned} \{x1(t) &= _C1\sin(\sqrt{3}t) + _C2\cos(\sqrt{3}t), \\ x2(t) &= \frac{1}{2}_C1\cos(\sqrt{3}t)\sqrt{3} - \frac{1}{2}_C2\sin(\sqrt{3}t)\sqrt{3} - \frac{1}{2}_C1\sin(\sqrt{3}t) - \frac{1}{2}_C2\cos(\sqrt{3}t)\} \end{aligned}$$

Bestemmelse af den løsning for hvilken $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$:

> dsolve({eq1,eq2, $x1(0) = 1, x2(0) = 1$});

$$\{x1(t) = \sin(\sqrt{3}t)\sqrt{3} + \cos(\sqrt{3}t),\ x2(t) = \cos(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t)\sqrt{3}\}$$

### *D.3.2 Faseportrætter*

Hvis systemet fx er

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 & -x_2 \\ -3x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

vil MAPLE kommandoerne

```
> with(DEtools):
> eqn1 := diff(x1(t),t)=-2*x1(t)-x2(t);eqn2 := diff(x2(t),t)=-3*x1(t)+x2(t);
> ic1 := x1(0)=-0.5, x2(0)=1;ic2 := x1(0)=0.5, x2(0)=-0.5;
> DEplot([eqn1,eqn2],[x1(t),x2(t)], t=-1..1,[[ic1],[ic2]],stepsize=.05);
```

få MAPLE til at tegne et faseportræt omkring punktet $(0, 0)$.

Vi har valgt betegnelsen “ic”i Maplekommandoen som en forkortelse for “initial condition”, altså “begyndelsesbetingelse”. Med ovenstående kommando tegner Maple løsningskurverne gennem disse punkter med gult. Man skal vælge begyndelsesbetingelserne så man får et godt indtryk af forløbet af løsningskurverne. Ofte er det en god ide at vælge punkter tæt på de stationære punkter som begyndelsesbetingelser.

I kommandoen “DEplot” kan man få Maple til at plotte et udsnit af planen: hvis man f.eks. er interesseret i opførslen omkring punktet $(1, 2)$ kan man skrive $x1 = 0..2, x2 = 1..3$ i Maplekommandoen, f.eks. lige efter angivelsen af stepsize.

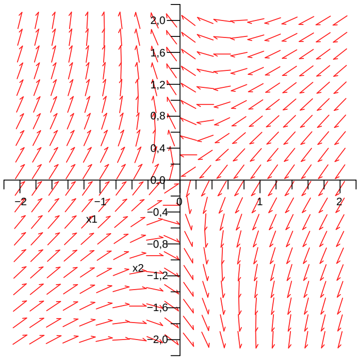
Prøv også at variere “stepsize”.

Følgende kommandosekvens leder til et faseportræt uden angivelse af begyndelsesbetingelser:

> with(DEtools):

> eq1 := diff(x1(t),t)=-2*x1(t)-x2(t);eq2 := diff(x2(t),t)=-3*x1(t)+x2(t);

> DEplot({eq1, eq2}, [x1, x2], t = 0..10, x1 = -2..2, x2 = -2..2, stepsize = .1);




## *D.3.3 Frekvenskarakteristikker*

Betragt overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s+3}{s^3 + 4s^2 + 3s}.$$

> H:=s− >(s+3)/(s^3+4*s^2+3*s);

$$H := s- > \frac{s+3}{s^3 + 4s^2 + 3s}.$$

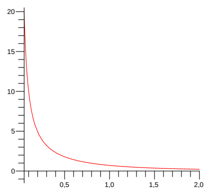
> A:=omega− >abs(H(I*omega));

$$A := \omega- > |H(I\omega)|$$

> A(omega) assuming omega::positive;

$$\frac{\sqrt{9+\omega^2}}{\sqrt{10\omega^4+\omega^6+9\omega^2}}$$

> plot(A, 0.05..2,-1.5..20);



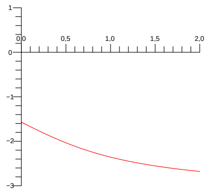

> Phi:=omega− >argument(H(I*omega));

$$\Phi := \omega- > argument(H(I\omega));$$

> Phi(omega) assuming omega::positive;

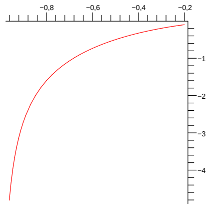
$$\arctan(\frac{1}{\omega}) - \pi.$$

> plot(Phi, 0..2, -3..1);




Et Nyquist plot kan laves med følgende kommando:

> with(plots);
> complexplot(H(I*omega), omega=0.2..2);



## D.4 Uendelige rækker

### *D.4.1 Kvotientkriteriet*

Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!3^n}{n^{3n}2^{2n}}.$$

Leddene opskrives:

```
> a[n]:= (3*n)!*3^n/(n^(3*n)*2^(2*n));
```

$$a_n := \frac{(3n)!3^n}{n^{(3n)}2^{(2n)}}$$

```
> sum(a[n], n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!3^n}{n^{(3n)}2^{(2n)}}$$

Kvotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ opstilles:

```
> subs(n=n+1,a[n]);
```

$$\frac{(3n+3)!3^{(n+1)}}{(n+1)^{(3n+3)}2^{(2n+2)}}$$

Bestemmelse af $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ :

```
> limit((%)/a[n],n=infinity);
```

$$\frac{81}{4}e^{-3}$$

```
> evalf(%);
```

$$1.008188134$$

Da $1.008188134 > 1$ er rækken divergent.

### *D.4.2 Kvotientkriteriet – rækker med variable led*

Betragt potensrækken

$$\sum_{n=0} \frac{(2n)!x^n}{(n!)^2}$$

Leddenes absolutværdi opskrives:

```
> a[n]:=abs((2*n)!*x^n/(n!)^2);
```

$$a_n := \left|\frac{(2n)!x^n}{(n!)^2}\right|$$

Kvotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ opstilles:

```
> subs(n=n+1,a[n]);
```

$$\left|\frac{(2n+2)!x^{n+1}}{(n+1)!^2}\right|$$

Bestemmelse af $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ :

```
> limit((%)/a[n],n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(2n+2)!x^{n+1}}{((n+1)!)^2}\right|}{\left|\frac{(2n)!x^n}{(n!)^2}\right|}$$

```
> simplify(%);
```

$$4\,|x|$$

Ifølge kvotientkriteriet er rækken konvergent når $4\,|x| < 1$, dvs. for $|x| < 1/4$, og divergent når $|x| > 1/4$ (tilfældet $|x| = 1/4$ må undersøges med andre metoder). Rækkens konvergensradius er således $\rho = 1/4$.

### *D.4.3 Bestemmelse af summen af uendelig række*

Maple er undertiden i stand til at finde summen af en uendelig række eksplicit, selv hvis der indgår en variabel. Betragt potensrækken

$$\sum_{n=1}\frac{(2n)!x^n}{(n!)^2}$$

Bemærk forskellen mellem brug af "sum"og "Sum"forneden:

```
> a[n]:=(2*n)!*x^n/(n!)^2;
```

$$a_n := \frac{(2n)!x^n}{n!^2}$$

```
> Sum(a[n], n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!x^n}{n!^2}$$

> sum(a[n], n=1..infinity);

$$\frac{4x}{\sqrt{1-4x}\left(1+\sqrt{1-4x}\right)}$$

Det er dog langfra altid at Maple (eller et hvilket som helst andet program) kan bestemme et konkret udtryk for en uendelig sum, så der er ingen garanti for at kommandoen leder til et resultat.

### *D.4.4 Integralkriteriet og sætning 4.38*

Vi undersøger om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \tag{D.1}$$

er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent.

Først betragtes rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \tag{D.2}$$

Vi anvender integralkriteriet, og checker først at forudsætningerne herfor er opfyldt:

> f:=x− > x^2/((x+1)*(x+2)*(x+3));

$$f := x \to \frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

> simplify(diff(f(x),x));

$$-\frac{x(x^3-11x-12)}{(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2}$$

Af dette udtryk fremgår at $f'$ er negativ for tilstrækkelig store værdier af $x$; altså er funktionen $f$ aftagende for tilstrækkelig store værdier af $x$. For senere brug undersøger vi nu hvor stor $x$ skal være for at $f'(x)$ er negativ. Til det formål løses ligningen $f'(x) = 0$. Først prøves kommandoen

> **fsolve**((%) = 0);

$$0$$

Herved findes kun én af rødderne. Problemet er at Maple ikke indser at vi blot skal sætte tælleren til nul – men det kan vi tvinge den til ved at erstatte ovenstående kommando med

> `fsolve`(numer(%) = 0);

$$-2.483611621, -1.282823863, 0, 3.766435484$$

("numer" er en forkortelse for "numerator", altså "tæller"). Vi slutter nu at $f$ er aftagende for $x \geq 3.8$; leddene i rækken (D.2) aftager altså for $n \geq 4$.

> Int(f(x), x=4..infinity)= int(f(x), x=4..infinity);

$$\int_4^\infty \frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = \infty$$

Ifølge integralkriteriet sluttes nu at rækken (D.2) er divergent.

Vi undersøger nu om rækken (D.1) er konvergent. Vi bruger sætning 4.38. Vi har allerede vist at funktionen $f$ er aftagende for $x \geq 3.8$.

> limit(f(x),x=infinity);

$$0$$

Funktionen $f$ går altså mod 0 for $x \to \infty$. Ifølge sætning 4.38 sluttes at rækken (D.1) er betinget konvergent.

Lad os nu bestemme summen af rækken (D.1) med en fejl på højst $10^{-5}$. Vi anvender atter sætning 4.38.

> b:=N->N ^2/((N+1)*(N+2)*(N+3));

$$b := N \to \frac{N^2}{(N+1)(N+2)(N+3)}$$

> fsolve(b(N+1) = 1/100000, N = 4..infinity);

$$99992.99989$$

Da $f$ er aftagende for $x \geq 4$ følger det heraf at

$$b_{N+1} \leq (10)^{-5} \text{ for alle } N \geq 99993.$$

Vi kan nu bestemme summen af rækken (D.1) med den ønskede nøjagtighed:
> evalf(sum((-1)^N*N^2/((N+1)*(N+2)*(N+3)), N=1..99993));

$$-0.011675375$$

### *D.4.5 Fourierrækker*

Vi vil beregne Fourierkoefficienterne for den $2\pi$-periodiske funktion givet ved

$$f(t) = t, \ t \in [-\pi, \pi[.$$

Funktionen opstilles:

```
> f:=t- >t;
```

$$f := t \to t$$

Beregning af Fourierkoefficienterne:

```
> assume(n,integer);
> a[n]:=1/Pi*int(f(t)*cos(n*t),t=-Pi..Pi);
```

$$a_{n\sim} = 0$$

```
> b[n]:=1/Pi*int(f(t)*sin(n*t),t=-Pi..Pi);
```

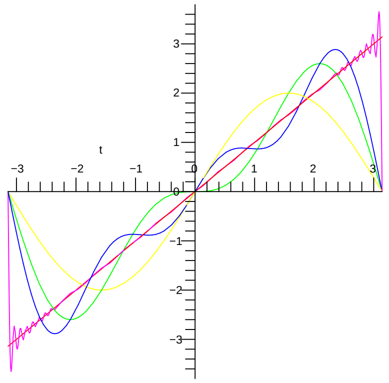
$$b_{n\sim} = -2\frac{(-1)^{n\sim}}{n\sim}$$

```
> S:=N- >sum(b[n]*sin(n*t),n=1..N);
```

Afsnitssummen $S_N$ opstilles:

$$S := N \to \sum_{n=1}^{N} b_n sin(nt)$$

```
> plot([f(t),S(1),S(2),S(3),S(60)], t=-Pi..Pi);
```




I forbindelse med Fourierrækker på kompleks form skal man være opmærksom på, at Maple ikke vil plotte udtryk som den mener antager komplekse værdier. Følgende omskrivning af den $N$'te afsnitssum er ofte nyttig:

$$\begin{aligned} S_N(t) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{int} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{int}. \end{aligned}$$

> restart;

$$f(t) = t,\ \ t \in [-\pi, \pi[.$$

> f:=t− >t;

$$f := t \to t$$

Beregning af Fourierkoefficienterne på kompleks form:

> assume(n,integer);

> c[n]:=1/(2*Pi)*int(f(t)*exp(-I*n*t),t=-Pi..Pi);

$$c_{n\sim} = \frac{I(-1)^{n\sim}}{n\sim}.$$

Dette udtryk er indlysende forkert når $n = 0$. For $n = 0$ fås

> 1/(2*Pi)*int(f(t)*exp(I*0*t),t=-Pi..Pi);

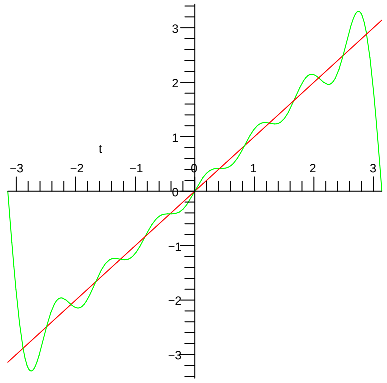
$$0$$

Afsnitssummen $S_N$ opstilles:

> S:=N→ sum(c[n]*exp(I*n*t),n=1..N)+sum(c[n]*exp(I*n*t), n=-N..-1);

$$S := N \to \sum_{n=1}^{N} c_n e^{Int} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{Int}.$$

> plot([f(t),S(7)], t=-Pi..Pi);



# Bilag E
## Symbolliste

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ : | alle reelle tal |
| $\mathbb{C}$ : | alle komplekse tal |
| $\mathbb{Z}$ : | alle hele tal, dvs. $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ |
| $\mathbb{N}$ : | alle hele positive tal, dvs. $1, 2, \ldots$ |
| $\mathbb{Q}$ : | alle brøker |
| $x \in A$ : | $x$ er element i mængden $A$ |
| $A \cup B$ : | foreningsmængden af mængderne $A$ og $B$ |
| $A \cap B$ : | fællesmængden for mængderne $A$ og $B$ |
| $A \subseteq B$ : | mængden $A$ er en delmængde af mængden $B$ |
| $\forall$ : | for alle |
| $\exists$ : | der eksisterer |
| $\sup E$ : | supremum over alle tal i mængden $E \subset \mathbb{R}$ |
| $\inf E$ : | infimum over alle tal i mængden $E \subset \mathbb{R}$ |
| $f : A \to B$ : | betegnelse for funktion $f$ med definitionsmængde $A$ og værdimængde i $B$ |
| $x \mapsto f(x)$ : | pilenotation for funktionen $f$ |
| $y^{(n)}$ : | den $n$'te afledede af funktion $y$ |

$H(s)$ : overføringsfunktion

$L^2(-\pi,\pi)$ : vektorrummet af $2\pi$-periodiske funktioner, der er kvadratisk integrable over et periodeinterval.

$\mathbf{A}$ : matrix

$\mathbf{A}^{-1}$ : invers af matrix, defineret når $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

$\mathbf{x}$ : vektor

$\mathbf{x}(t)$ : vektorfunktion

$\dot{\mathbf{x}}(t)$ : den afledede af en vektorfunktion

**Nogle nyttige formler:**

$$\begin{aligned}
e^{(a+i\omega)t} &= e^{at}(\cos\omega t + i\sin\omega t),\ a,\omega \in \mathbb{R};\\
\cos\omega t &= \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),\ \omega \in \mathbb{R};\\
\sin\omega t &= \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}),\ \omega \in \mathbb{R};\\
a+ib &= re^{i\theta},\ r = |a+ib|,\ \theta = \mathrm{Arg}\,(a+ib)\\
& \quad a = r\cos\theta,\quad b = r\sin\theta;\\
|a+ib| &= \sqrt{a^2+b^2},\ a,b \in \mathbb{R}\ \text{(Pythagoras)};\\
|a+b| &\leq |a|+|b|,\ a,b \in \mathbb{C}\ \text{(trekantsuligheden)};\\
\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= ad-bc\\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\ \text{når } \det(\mathbf{A}) = ad-bc \neq 0\\
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\\
\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y\\
\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y
\end{aligned}$$

**Størrelsesforhold:**

$$\frac{x^a}{b^x} \to 0 \text{ for } x\to\infty \text{ for alle } a>0, b>1$$

$$\frac{\ln x}{x^a} \to 0 \text{ for } x\to\infty \text{ for alle } a>0.$$

**Delvis integration:**

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx,\ \text{hvor } F(x) = \int f(x)\,dx.$$

**Integration ved substitution:**

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)),\ \text{hvor } F(x) = \int f(x)\,dx.$$

# Bilag F
## Opgavesamling

### F.1 Uendelige rækker

**Opgave 101** Afgør for hver af de nedenstående rækker, om rækken er konvergent eller divergent. Angiv summen i de tilfælde, hvor rækken er konvergent.

(i) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots$

(ii) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

(iii) $\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \dots$

(iv) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$

(v) $\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 4}{4} + \dots$

(vi) $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \dots$

**Opgave 102** Afgør for hver af nedenstående rækker om rækken er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n}{n^2}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{2}{n+5}$ (vink: $cos(n\pi) = (-1)^n$)

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{1}{n^2+7}$

**Opgave 103** Undersøg for hver af de nedenstående rækker om rækken er konvergent eller divergent, og angiv for de konvergente rækker summen.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

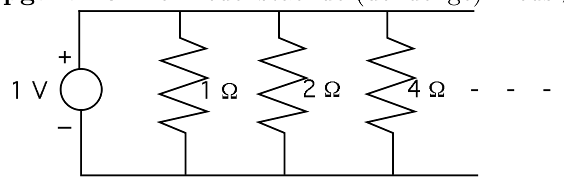
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+2)}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{5} - 1\right)^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$ (vink: brug metoden fra eksempel 4.18(iii))

**Opgave 104** For nedenstående (uendelige) kredsløb, bestem strømmen $I$.




**Opgave 105** Bevis ved hjælp af integralkriteriet følgende 2 uligheder:

(i) $\pi/4 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \pi/4 + \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{1}{8} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{4}$

**Opgave 106**

A og B deler en lagkage på den (særegne) måde at A først tager halvdelen, så tager B halvdelen af resten, så tager A halvdelen af resten, osv. indtil, der kun er ubetydelige krummer tilbage. Hvor stor en del af lagkagen får A? Besvar spørgsmålet både med og uden brug af teorien om uendelige rækker.

**Opgave 107** Undersøg for hver af de nedenstående rækker om rækken er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

**Opgaven fortsætter!**

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\log n}$

(f) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-3\sqrt{n}}$

**Opgave 108**

(i) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}] ,$$

er divergent. (Vink: undersøg $\sqrt{n} a_n$ for $n \to \infty$).

(ii) Skriv leddene $a_n$ op for $n = 1, 2, 3$. Det bemærkes, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en sum af led af formen $\frac{1}{\sqrt{n}}$, med fortegnet plus når $n$ er ulige og fortegnet minus når $n$ er lige. Ifølge Leibniz' kriterium er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ konvergent. Hvorfor er dette ikke i modstrid med konklusionen ovenfor?

**Opgave 109** Bevis at nedenstående rækker er konvergente:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{9/8}}$ (Vink: $\frac{\ln n}{n^{9/8}} = \frac{\ln n}{n^{1/16}} \frac{1}{n^{17/16}}$, og $\frac{\ln n}{n^{1/16}} \to 0$ for $n \to \infty$)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln(n+\frac{1}{2})}$

**Opgave 110**

(i) Find konvergensradius $\rho$ for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^{n+1}.$$

(ii) Angiv i intervallet $-\rho < x < \rho$ et eksplicit udtryk for rækkens sum.

**Opgave 111**

(a) Vis at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{5/2}}$ har en konvergent majorantrække.

(b) Angiv en konvergent række for

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{5/2}} dx .$$

**Opgave 112** Denne opgave tager udgangspunkt i sætning 5.2 om kvotientrækker.

(i) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},\ x \in ]-1,1[. \tag{F.1}$$

*Vink:* differentier på begge sider af lighedstegnet i (5.3) og anvend sætning 5.17.

(ii) Ved at anvende den samme procedure på rækken (F.1) bedes du nu vise at

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3},\ x \in ]-1,1[.$$

(iii) Bestem ved brug af resultaterne i (i) og (ii) summen af rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

**Opgave 113** Angiv for hver af de følgende uendelige rækker de værdier af $x$ for hvilke rækken er konvergent, samt rækkens sum for disse $x$:

(i) $\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \cdots$

(ii) $e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots$

(iii) $\log x + \log 2x + \log 3x + \cdots$

**Opgave 114** Hvilke af nedenstående rækker har en majorantrække? Hvilke har en konvergent majorantrække?

(a) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, x \in \mathbb{R}$

(b) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, |x| < 1$

(c) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, |x| < 0,99$

(d) $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \cdots x \in \mathbb{R}$

Er funktionen $f(x)$ i (e) kontinuert? Hvilken sammenhæng er der mellem $f(x)$ og funktionen

$$g(x) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^3}?$$

Forklar hvilke resultater fra bogen du bruger for at besvare dette.

**Opgave 115** Bestem for rækkerne forneden de værdier af $x$ for hvilke den angivne potensrække er konvergent, og find for disse værdier af $x$ rækkens sum (opgaven besvares med udgangspunkt i sætning 5.2).

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

**Opgave 116** Der er givet potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

(i) Find rækkens konvergensradius.

(ii) Idet $f(x)$ betegner rækkens sum, skal man finde potensrækken for $\int_0^x f(t)dt$, og ved hjælp heraf bestemme et eksplicit udtryk for $f(x)$.

**Opgave 117** Find potensrækken for hver af funktionerne

(a) $f(x) = 2\sin x + \cos x$

(b) $g(x) = 2\sin x \cos x$

**Opgave 118** Vis, at funktionen

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cos nx - \sin^2 nx}{3^n - 1}, \; x \in \mathbb{R}$$

er kontinuert, f.eks ved at finde en konvergent majorantrække.

**Opgave 119** Målet med denne opgave er at finde $e^A$, hvor $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Først bemærkes, at $A$ har egenværdien 1 med tilh. egenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, samt egenværdien 2 med egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A$ kan således diagonaliseres, dvs.

$$A = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U^{-1},$$

hvor $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Vis, at for $k = 1, 2, ..$ er

$$A^k = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} U^{-1}.$$

(c) Find $e^B$, hvor $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) Find nu $e^A$.

**Opgave 120** Givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(i) Vis at $A^2 = -\mathbf{1}$

(ii) Bestem matricen $e^A$ .

**Opgave 121**

(a) Bestem konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot n!} x^n.$$

Lad $f(x)$ betegne rækkens sum.

(b) Find potensrækken for funktionen

$$h(x) = \int_0^x t f'(t) dt.$$

Angiv også rækkens konvergensradius.

(c) Find ved brug af potensrækken for $e^x$ et funktionsudtryk for funktionen $h(x)$.

**Opgave 122** Undersøg om følgende rækker er konvergente:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{i\pi n}{2}} \frac{1}{n}$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvorom det vides at den $N'te$ afsnitssum er $S_N = \frac{N+1}{\ln N+2}$.

**Opgave 123** Er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ absolut konvergent eller betinget konvergent? Find summen med en fejl på højst 0.1.

**Opgave 124**

(i) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{x}{n})$$

er absolut konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$ (vink: brug at $|\sin x| \leq |x|$ for alle $x \in \mathbb{R}$).

(ii) Vis, at funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{x}{n}), \; x \in \mathbb{R},$$

er differentiabel, og find $f'(0)$.

**Opgave 125** Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n!}{n^n})$$

er konvergent.

**Opgave 126**

(a) For hvilke værdier af $a \in \mathbb{R}$ er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+a)^n}$$

konvergent?

(b) Bestem for disse værdier af $a$ rækkens sum.

**Opgave 127** Find et polynomium $P(x)$ for hvilket

$$|\sin x - P(x)| \le 0.05 \text{ for alle } \ x \in [0,3].$$

**Opgave 128** Vi benytter Maple til at undersøge rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot \ln n}{n^n}.$$

(a) Hvilken information giver $n$'te ledskriteriet?

(b) Hvilken information giver kvotientkriteriet?

**Opgave 129**

(i) Begrund, at rækken

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots$$

er divergent.

(i) Angiv et helt tal $N > 100$ for hvilket

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{N} > 100$$

(Du må gerne prøve at besvare spørgsmålet ved hjælp af en computer!)

**Opgave 131** Denne opgave handler om beregning af summen

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/10}}. \tag{F.2}$$

(i) Find v.h.a. Maple summen $\sum_{n=1}^{31642} \frac{1}{n^{11/10}}$.

Intuitivt vil man forvente, at 31642 led er nok til at give en god vurdering af summen $S$. Vi skal nu undersøge om dette er tilfældet.

(ii) Bestem $N \in \mathbb{N}$ således at $\left| S - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{11/10}} \right| \leq 0.1$.

(iii) Kan Maple ved brug af informationen i (ii) beregne tallet $S$ med en fejl på højst 0.1?

(iv) Uden at regne bedes du redegøre for hvorledes antallet af nødvendige led (dvs. $N$) ændres når rækken i (F.2) skiftes ud med f.eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.01}}$ eller $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$.

Svaret i (iii) bør give anledning til undren - Maple er jo i stand til uden problemer at beregne –eller ihvertfald angive – værdien af den *uendelige sum* i (F.2). Forneden benyttes en anden metode, som leder til bestemmelse af $S$ med en fejl på højst 0.1.

(v) Benyt korollar 4.35(ii) til at bestemme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/10}}$$

med en fejl på højst 0.1.

**Opgave 133** Vis at potensrækken for

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

ikke har en konvergent majorantrække for $x \in ]-1, 1]$.

**Opgave 134** For hvilke reelle værdier af tallet $x$ er rækken

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{x^4}{4 \cdot 2^4} + \cdots$$

konvergent ?

**Opgave 135** Afgør om nedenstående række er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent:

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} (-1)^n.$$

**Opgave 136**

(i) Bestem konvergensradius $\rho$ for rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n.$$

Sæt nu

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n, \;\; x \in ]-\rho, \rho[.$$

(ii) Find et funktionsudtryk for den *afledte* funktion, $f'(x)$ (ved et funktionsudtryk forstås en regneforskrift, hvori man direkte kan indsætte $x$ og beregne $f'(x)$).

**Opgave 137**

(i) Bestem konvergensradius $\rho$ for rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n.$$

(ii) Er rækken konvergent for $x = \pm\rho$?

**Opgave 138** Afgør om nedenstående række er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent:

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n}$$

**Opgave 139**

(i) Bestem konvergensradius $\rho$ for rækken

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n!}$$

Sæt nu

$$f(x) := \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n!}, \;\; x \in ]-\rho, \rho[.$$

(ii) Find ved brug af potensrækken for $e^x$ et funktionsudtryk for $f'(x)$.

(iii) Bestem herved et funktionsudtryk for $f(x)$.

**Opgave 140** Undersøg om følgende række er konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n+1}$$

**Opgave 142** Undersøg om følgende rækker er betinget konvergente, absolut konvergente, eller divergente:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+13}$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} (n!+5)^2$;

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvorom det vides at den $N$'te afsnitssum er givet ved

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \cos(\pi N).$$

**Opgave 143** Bestem konvergensradius for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (3x)^n.$$

**Opgave 144**

(i) For hvilke værdier af $x \in \mathbb{R}$ er rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$$

konvergent?

(ii) Bestem for disse værdier af $x$ en forskrift for sumfunktionen $f(x)$.

**Opgave 145** Det oplyses (skal *ikke* vises) at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} x^{n-1}$$

har konvergensradius $\rho = 2$. Sæt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} x^{n-1}, \ x \in ]-2, 2[.$$

(i) Vis at for $|x| < 2$ er

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{2x}{2-x}.$$

(ii) Er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} x^{n-1}$ konvergent for $x = \pm 2$?

**Opgave 146** Undersøg om følgende rækker er betinget konvergente, absolut konvergente, eller divergente:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^{n+3}}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvor

$$a_n = \begin{cases} n^3 & \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots, 10000 \\ \frac{(-1)^n}{n^3} & \text{for} \quad n \geq 10001 \end{cases}.$$

**Opgave 147** Bestem konvergensradius for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^{2n}.$$

**Opgave 148** Find en tilnærmet værdi for $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ med en fejl på højst 0.02.

**Opgave 149**

(i) Vis at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$ er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$.

Sæt nu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Vis at funktionen $f$ er kontinuert.

(iii) Vis at funktionen $f$ er differentiabel.

(iv) Find $f'(0)$.

(v) Sammenlign den betragtede række og konklusionen i (iii) med eksempel 5.26.

**Opgave 150** Vi ved at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er konvergent, og at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent. Brug sammenligningskriteriet og ækvivalenskriteriet til at afgøre om nedenstående rækker er konvergente.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sin n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

**Opgave 151** Betragt rækkefremstillingen for $\ln(1+x)$ i appendiks B.

(i) Vis, at rækken ikke har en konvergent majorantrække for $x \in ]-1,1]$.

(ii) Gør rede for at funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n, \; x \in ]-1,1[$$

er kontinuert og differentiabel for $x \in ]-1,1[$.

(iii) Find en funktionsforskrift for $f'(x)$.

**Opgave 152**

(a) Find ved brug af en passende formel summen af rækkerne

$$\sum_{n=200}^{\infty} 3(\frac{1}{4})^n, \quad \sum_{n=10}^{\infty} 3(\frac{1}{4})^{n-3}.$$

(b) Afgør om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, hvor

$$a_n = \begin{cases} n^2 & \text{for} \quad n = 1, 2, ..., 100 \\ \frac{1}{n^2} & \text{for} \quad n \geq 101. \end{cases}$$

(c) For en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vides at den $N$'te afsnitssum er givet ved $S_N = \frac{1}{N}\cos(N\pi)$. Afgør om rækken er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent.

**Opgave 153**

(i) Vis at for funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ er

$$\int_0^{1/2} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{F.3}$$

Formålet med denne opgave er at finde en tilnærmet værdi for denne sum.

(ii) Vis, at for $N \in \mathbb{N}$ er $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{N+1}}$.

(iii) Lad $S_N$ betegne den $N$'te afsnitssum af rækken i (F.3). Bestem $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \frac{1}{2^{n+1}} - S_N \right| \leq 10^{-3}.$$

Vink: indse først at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \frac{1}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

(iv) Brug nu Maple til at beregne summen i (F.3) med en fejl på højst $10^{-3}$.

**Opgave 155** Følgende spørgsmål kan besvares uafhængigt af hinanden.

(i) Er $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ konvergent?

(ii) For en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vides at den $N$'te afsnitssum er givet ved

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{N} + 1.$$

Er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent?

(iii) Find de værdier af $x \in \mathbb{R}$ for hvilke

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

er konvergent (husk at undersøge konvergensintervallets endepunkter).

**Opgave 156**

(i) Undersøg om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ er konvergent.

(ii) Er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}$ absolut konvergent?

I resten af denne opgave betragtes den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}. \tag{F.4}$$

(iii) Bestem de værdier af $x \in \mathbb{R}$ for hvilke rækken (F.4) er konvergent.

(iv) Bestem for disse værdier af $x$ summen af rækken (F.4).

**Opgave 157** Det oplyses (skal ikke vises) at potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ har konvergensradius $\rho = 1$. Sæt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \;\; x \in ]-1, 1[.$$

(i) Gør rede for at $f$ er differentiabel, og find et udtryk for $f'(x)$ via en uendelig række.

(ii) Vis at $f'(x) = \frac{1}{1-x} - 1$.

(iii) Find v.h.a. (ii) et funktionsudtryk for $f(x)$.

**Opgave 158** Undersøg om følgende rækker er konvergente:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}$

(iii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \frac{1}{n^4}$

**Opgave 159** Er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^3+4}$$

betinget konvergent, absolut konvergent, eller divergent?

**Opgave 160**

(i) Vis at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-nx}$$

er konvergent for alle $x > 0$.

Sæt nu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-nx}, \quad x > 0.$$

(ii) Vis at funktionen $f$ er kontinuert.

(iii) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx}$$

har en konvergent majorantrække på intervallet $]0, \infty[$.

(iv) Er $f$ differentiabel for $x > 0$?

(v) Har rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx}$$

en konvergent majorantrække på intervallet $]-1, 1[$?

**Opgave 161** Som bekendt er rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$ konvergent. Vi skal nu finde en tilnærmet værdi for summen.

(i) Bestem $N \in \mathbb{N}$ således at forskellen mellem $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$ og $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$ højst er 0.01.

(ii) Find nu ved brug af den fundne $N$-værdi og Maple's sum-kommando en approksimativ værdi for $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$, med en fejl på højst 0.01.

(iii) Samme spørgsmål som (i)+(ii), men med rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n^4}$.

(iv) For rækken i (iii) fandt du, at der skulle bruges væsentligt færre led end i (ii) for at opnå en fejl på højst 0.01. Forklar dette i ord.

**Opgave 162** Vis, at for ethvert $\alpha > 1$ og $N \in \mathbb{N}$ er

(i)

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(N+1)^\alpha} \frac{\alpha+N}{\alpha-1}.$$

(ii)

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

(vink: for de betragtede værdier af $\alpha$ er $\alpha + N < \alpha + \alpha N$).

**Opgave 163**

(i) Undersøg monotoniforholdende for funktionen

$$f(x) = \frac{100}{x - 10\ln x + 30}, \quad x \geq 1.$$

(ii) Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100}{n - 10\ln n + 30}$$

er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent.

**Opgave 164** Husk at funktionerne *hyperbolsk tangens* og *hyperbolsk cotangens* er defineret ved

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

og

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}, \quad x \neq 0.$$

Undersøg om rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$$

er konvergente.

## F.2 Fourierrækker

**Opgave 201** Find Fourierkoefficienterne $a_n$ og $b_n$ for den funktion med periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$, der i periodeintervallet $0 \leq t \leq T$ er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{for } 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{for } T/2 < t \leq T \end{cases}$$

**Opgave 202** Vi betragter den $2\pi$-periodiske funktion $f$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x, \ x \in [0, 2\pi[.$$

(i) Skitser funktionen $f$.

(ii) Vis, at $f$ er lige (et argument der tager udgangspunkt i nulpunkterne for $f$ og at $f$ er et 2.gradspolynomium er tilstrækkeligt).

(iii) Vis, at Fourierrækken for $f$ er givet ved

$$f \sim -\frac{1}{6}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx.$$

(iv) Gør rede for, at tegnet "$\sim$" kan erstattes af tegnet "$=$", dvs. at der for alle $x$ gælder at

$$f(x) = -\frac{1}{6}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx. \tag{F.5}$$

(v) Brug (F.5) til at vise at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(vi) Lad $S_N(x)$ betegne den $N$'te afsnitssum i Fourierrækken. Undersøg hvor stor $N$ skal være for at forskellen mellem $f(x)$ og $S_N(x)$ højst er 0.1 for alle $x$. (*Vink:* brug sætning 6.17 og resultatet i eksempel 4.36).

(vii) Bestem summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

(viii) Bestem for $x \in [0, 2\pi]$ summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$.

**Opgave 203** Lad $f(t)$ være den *lige* funktion med periode 4, der i intervallet $[0, 2[$ er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{for } 1 < t < 2 \end{cases}$$

(1) Skitsér funktionen $f$.

**Opgaven fortsætter!**

(2) Find Fourierkoefficienterne for $f$.

(3) Angiv effekten $P(f)$.

(4) Hvor stor en brøkdel af effekten af $f$ er indeholdt i de første 4 led af Fourierrækken (svarende til $n = 0, 1, 2, 3$)?

**Opgave 204** En harmonisk påvirkning kan som bekendt skrives på formerne
1) $A\cos(\omega t + \varphi)$, 2) $a\cos\omega t + b\sin\omega t$, 3) $Re(c \cdot e^{i\omega t})$
hvor $A$, $a$ og $b$ er reelle tal, og $c \in \mathbb{C}$. Nedenfor er angivet en række funktioner, der hver skal skrives på disse tre måder.
(1) $\sin 4t$ (2) $\cos(3t - \frac{\pi}{4})$ (3) $Re((2-i)e^{i\frac{\pi}{2}t})$

**Opgave 205** Skriv hver af følgende funktioner som en sum af en lige funktion $f_L(t)$ og en ulige funktion $f_U(t)$.

(a) $f(t) = t^4 + 2t^3 - t^2 + 1$

(b) $f(t) = \cos 3t \cdot \sin t$

(c) $f(t) = |t + 1|$

**Opgave 206** Vis at de to funktioner $f_1(t) = 2$, $f_2(t) = t - \frac{1}{2}$, udgør et ortogonalsystem på intervallet $[0, 1]$.

**Opgave 207** Bestem Fourierkoefficienterne $a_0, a_1, b_1$ for den $2\pi$-periodiske funktion givet ved

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{for } -\pi < t \leq 0, \\ \sin t & \text{for } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

**Opgave 209** Lad $f$ betegne den $2\pi$- periodiske funktion, der for $t \in [-\pi, \pi[$ er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{for } \frac{-\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(i) Skitsér $f$.

(ii) Find Fourierkoefficienterne $a_0, a_1$ samt $b_n,\ n = 1, 2, ..$ .

(iii) Konvergerer Fourierrækken for alle $t \in \mathbb{R}$? Og i bekræftende fald, hvad konvergerer den imod?

(iv) Kan tegnet "$\sim$" i Fourierrækken erstattes af "$=$"?

(v) Har Fourierrækken en konvergent majorantrække?

**Opgave 210** Find Fourierrækken på reel form for den $2\pi$-periodiske funktion $f$ hvis Fourierkoefficienter på kompleks form er givet ved

$$c_n = \begin{cases} \frac{-i}{n} & \text{for} \quad n = 1, 2, ..., 10, \\ \frac{i}{n} & \text{for} \quad n = -1, -2, ..., -10, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

**Opgave 211** En funktion $f$ med periode 1 er i intervallet $]0, 1[$ givet ved $f(t) = e^{-t}$. Vi ønsker at bestemme den anden afsnitssum $S_2(t)$ i Fourierrækken for $f(t)$ på reel form.

(i) Skriv udtrykkene for Fourierkoefficienterne $a_n$ og $b_n$ op - har du lyst til at regne disse integraler ud?

(ii) Find $S_2(t)$ ved først at udregne et passende antal Fourierkoefficienter på kompleks form. Benyt at når $f$ er en reel funktion, så er $c_{-n} = \overline{c_n}$.

**Opgave 213** En funktion $f(t)$ med periode $T$ er i periodeintervallet $[0, T]$ bestemt ved, at

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \frac{T}{8}, \ \frac{7T}{8} \le t \le T \\ 0, & \frac{T}{8} < t < \frac{7T}{8} \end{cases}$$

(i) Find Fourierrækken for $f(t)$.

(ii) Find ved hjælp af den fundne Fourierrække summen af rækken

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(vink: brug Fouriers sætning med $t = T/8$ og anvend at $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$).

**Opgave 214**

(i) Find Fourierrækken for $f(t) = |\sin t|$.

(ii) Vis at

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Bestem ved hjælp af Fourierrækken tallet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

**Opgaven fortsætter!**

(iv) Beregn tallet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$$

(v) Skriv Fourierrækken for funktionen $|\sin(\cdot)|$ på kompleks form.

(vi) Lad $S_N$ være den $N$'te afsnitssum. Find $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|\,|\sin x| - S_N(x)| \leq 0.1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(vii) Beregn hvor stor del af effekten for $f(t)$ der er indeholdt i de tre første (fra nul forskellige) led i Fourierrækken for $f(t)$.

**Opgave 215** En funktion $f(t)$ med periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ er i periodeintervallet $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ givet ved at

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4t}{T} & \text{for} \quad \frac{-T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ 0 & \text{for} \quad \frac{T}{4} < |t| \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

(a) Find effekten af funktionen $f$.

(b) Find Fourierkoefficienterne $a_n$ og $b_n$ for $f(t)$.

(c) Opskriv det 4. afsnit i Fourierrækken for $f(t)$.

(d) For hvilke værdier af $N$ indeholder den $N$'te afsnitssum i Fourierækken for $f$ mindst 85% af effekten i $f$?

**Opgave 217** Betragt den ulige $2\pi$-periodiske funktion, der for $x \in [0, \pi]$ er givet ved

$$f(x) = \frac{\pi}{96}(x^4 - 2\pi x^3 + \pi^3 x).$$

(i) Beregn $f(-\frac{\pi}{2})$.

(ii) Vis at

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^5}, \ x \in \mathbb{R}$$

(vink: brug at $\int_0^{\pi} (x^4 - 2\pi x^3 + \pi^3 x) \sin nx \, dx = 24 \frac{1-(-1)^n}{n^5}, \ n \in \mathbb{N}$).

(iii) Vis at

$$|f(x) - \sin x| \leq 0.01, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

**Opgave 222** Betragt den $2\pi$-periodiske funktion givet ved

$$f(t) = t,\ \ t \in [-\pi, \pi[.$$

(a) Vis, at den *reelle* Fourierrække for $f(t)$ er givet ved

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nt.$$

(b) Find v.h.a. a) summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \qquad \textit{Vink: brug Fouriers sætning med } t = \tfrac{\pi}{2}.$$

(c) Find de *komplekse* Fourierkoefficienter for $f$.

(d) Har den reelle Fourierrække en konvergent majorantrække?

(e) Opskriv for hvert $t \in [-\pi, \pi]$ summen af Fourierrækken.

(f) Funktionen $f$ er differentiabel for $t \in ]-\pi, \pi[$. Er det tilladt at "differentiere under sumtegnet" i Fourierrækken, hvilket ville lede til

$$1 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cos nt,\ \ t \in ]-\pi, \pi[\,?$$

Sammenlign med sætning 5.35.

**Opgave 223** Betragt den $2\pi$-periodiske funktion givet ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi \le t \le 0 \\ 1 & \text{for} \quad 0 < t < \pi \end{cases}$$

(a) Vis, at den *komplekse* Fourierrække for $f$ er givet ved

$$f(t) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n \text{ ulige}, n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi n} e^{int}.$$

(b) Find ved hjælp af a) samt Parsevals ligning summen af rækken

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

(c) Kan tegnet "$\sim$" i Fourierrækken erstattes med "$=$"?

**Opgave 224** Lad $f$ betegne den funktion med periode $\pi$, for hvilken

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [0, \frac{\pi}{4}[, \\ 0 & \text{for } t \in [\frac{\pi}{4}, \pi[. \end{cases}$$

(i) Bestem Fourierrækken for $f$.

(ii) Har Fourierrækken en konvergent majorantrække?

(iii) Kan du svare på (ii) *uden* at beregne Fourierkoefficienterne?

**Opgave 225** Find Fourierkoefficienterne for den $2\pi$-periodiske funktion givet ved $f(x) = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Kan "$\sim$" erstattes af "$=$"?

**Opgave 226** Vi betragter den $2\pi$-periodiske funktion $f$ givet ved

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{for} \quad 0 < t \leq \pi \\ 0 & \text{for} \quad \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

Den $N$'te afsnitssum i Fourierrækken for $f$ har formen

$$S_N(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

(i) Skitsér funktionen $f$.

(ii) Undersøg hvor stor $N$ skal være for at forskellen mellem $f(t)$ og $S_N(t)$ højst er 0.1 for alle $t$. Du får *ikke* brug for at beregne Fourierkoefficienterne for at svare på dette.

Man kan vise at Fourierrækken for funktionen er

$$f \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2nt).$$

(iii) Vis, at "$\sim$"kan erstattes af "$=$", dvs. at der for alle $t$ gælder at

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2nt).$$

Betragt nu afsnitssummen

$$\tilde{S}_N(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2nt).$$

(iv) Vis at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{2N+1}.$$

Vink: Benyt at

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

samt en overvejelse som i eksempel 4.6 (iii).

(v) Bestem vha. kendskabet til Fourierkoefficienterne $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(t) - \tilde{S}_N(t)| \leq 0.1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(vi) Sammenlign den fundne værdi for $N$ med den du fandt i (ii). Plot funktionen $f$ og de afsnitssummer du fandt i (ii) og (v).

**Opgave 227**

(i) Vis, at Fourierrækken for den $2\pi$-periodiske funktion $f$ givet ved

$$f(x) = |x|, \;\; x \in [-\pi, \pi[$$

er

$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

(ii) Vis at tegnet "$\sim$"kan erstattes af "$=$", dvs. at Fourierrækken konvergerer punktvist mod $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Undersøg hvor stor $N$ skal være for at forskellen mellem $f(x)$ og den $N$'te afsnitssum $S_N(x)$ højst er 0.1 for alle $x$. Hvor stor skal $N$ vælges hvis fejlen højst må være 0.01?

(iv) Har Fourierrækken en konvergent majorantrække?

(v) Skitsér funktionen $f$ og afsnitssummen i (iii).

(vi) Beregn Fourierkoefficienterne på kompleks form.

(vii) Bestem summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

**Opgave 228** Vi betragter den $2\pi$-periodiske funktion $f$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for} \quad 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{for} \quad \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

(i) Skitsér funktionen $f$.

(ii) Gør rede for at Fourierrækken for $f$ er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$ (du behøver ikke at beregne Fourierkoefficienterne her).

(iii) Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x = 0$?

(iv) Beregn Fourierkoefficienten $a_0$.

(v) Bestem Fourierkoefficienten $c_0$.

**Opgave 229**

(i) Find overføringsfunktionen for det lineære system

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

(ii) Vis at systemet er asymptotisk stabilt.

(iii) Find, udtrykt ved en uendelig række, en løsning til systemet når $u$ er den $2\pi$-periodiske funktion givet ved $u(t) = t^2, \ t \in [-\pi, \pi[$ (vink: brug resultaterne i eksempel 6.8).

**Opgave 230** Udregningerne i eksempel 7.9 ledte til $N \geq 128$. Kan du modificere regningerne, og herved opnå en bedre værdi for $N$?

**Opgave 231**

(i) Find overføringsfunktionen for det lineære system

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

(ii) Vis at systemet er asymptotisk stabilt.

(iii) Find, udtrykt ved en uendelig række, en løsning til systemet når $u$ er den $2\pi$-periodiske funktion givet ved $u(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{\pi}{2}t, \ t \in [0, 2\pi[$ (vink: brug resultaterne i opgave 202).

**Opgave 232** Lad $f$ betegne den funktion med periode $2\pi$, der i periodeintervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{for} \quad \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

(i) Skitsér grafen for $f$ i intervallet $[-2\pi, 4\pi]$.

(ii) Bestem Fourierrækken for funktionen $f$.

(iii) Konvergerer Fourierrækken for alle $x \in \mathbb{R}$? Og i bekræftende fald, hvad konvergerer den mod?

## F.3 $n$'te ordens differentialligninger

**Opgave 301**

(a) Find samtlige reelle løsninger til differentialligningen

$$\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = 0.$$

(b) Find nu samtlige reelle løsninger til

$$\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = t.$$

**Opgave 304** Bestem overføringsfunktionen for differentialligningen

$$y''' + 4y'' + 3y' = u' + 3u$$

**Opgave 305** Find overføringsfunktionen for differentialligningen

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} - 4y = \dot{u} + 2u.$$

Find det stationære svar på følgende påvirkninger:

$$\text{(a) } u(t) = e^{2t}. \quad \text{(b) } u(t) = e^{2it}. \quad \text{(c) } u(t) = \cos 2t.$$

**Opgave 306**

(i) Find alle komplekse løsninger til differentialligningen

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$

(ii) Find nu alle reelle løsninger til differentialligningen.

**Opgave 307** Beregn og skitsér frekvenskarakteristikkerne for differentialligningen $\dot{y} + y = \dot{u}$.

Aflæs på disse grafer (med tilnærmelse) de stationære svar på påvirkningerne

$$\text{(1) } u(t) = \cos t. \qquad \text{(2) } u(t) = \cos\sqrt{3}t.$$

**Opgave 308** Betragt differentialligningen

$$y'' - y' - 6y = u' + 2u, \tag{F.6}$$

hvor $u$ er påvirkningen og $y$ er svaret.

(i) Find overføringsfunktionen hørende til (F.6).

(ii) Find det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = e^t$.

(iii) Find for $u(t) = e^t$ den fuldstændige reelle løsning til (F.6).

**Opgave 309** Find ved anvendelse af gættemetoden én løsning til hver af de to ligninger

(1) $\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = \cos 2t$

(2) $\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = \sin 2t$

(3) Hvordan kan man finde samtlige løsninger til (1) og (2)?

(4) Gør rede for hvordan man kan finde samtlige løsninger til ligningen

$$\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = 17\cos 2t - 121\sin 2t.$$

**Opgave 310** Betragt differentialligningen

$$y'' - y = u' + u \tag{F.7}$$

(a) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$ hørende til (F.7).

(b) Bestem amplitudekarakteristikken $A(\omega)$ og fasekarakteristikken $\varphi(\omega)$.

(c) Find det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = \cos(\sqrt{3}t)$.

**Opgave 311** Betragt differentialligningen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u'(t) + 2u(t),$$

hvor $u(t)$ er påvirkningen og $y(t)$ er svaret.

(a) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$.

(b) Find svaret $y(t)$ på påvirkningen $u(t) = e^t$.

**Opgave 312** Har differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}$$

en løsning på formen $y(t) = Ce^{2t}$, hvor $C$ er en konstant?

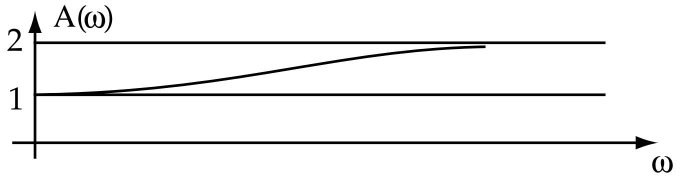
**Opgave 313** Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y = \cos t.$$

**Opgave 314** Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} = \sin t.$$

**Opgave 315** Bestem et sæt konstanter, $A, B, C$ og $D$ så $H(s) = \frac{As+B}{Cs+D}$ bliver overføringsfunktion for en differentialligning med den på figuren angivne amplitudekarakteristik:




**Opgave 316** Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} + y = u, \tag{F.8}$$

hvor $u(t)$ er påvirkningen, og $y(t)$ er svaret.

(i) Find overføringsfunktionen $H(s)$.

(ii) Find det stationære svar hørende til (F.8) når $u(t) = e^{-t/2}$.

(iii) Bestem den fuldstændige reelle løsning til (F.8) når $u(t) = e^{-t/2}$.

**Opgave 317**

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 10\frac{d^2y}{dt^2} + 169y = 0.$$

(ii) Vis at differentialligningen har netop én partikulær løsning $y = f(t)$ for hvilken

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ \text{og } f(t) \to 0 \text{ for } t \to \infty.$$

**Opgave 318** Betragt differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = u' + u;$$

her er $u$ påvirkningen, og $y$ er den søgte løsning (samme ligning som i opgave 511).

(i) Bestem ved håndregning udtryk for amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken.

(ii) Lav ved hjælp af Maple plots af frekvenskarakteristikkerne, samt et Nyquist plot.

**Opgave 319** Betragt differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} - 2y = u' - u,$$

hvor $u$ er påvirkningen og $y$ er svaret.

(i) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$.

(ii) Bestem svaret på påvirkningen $u(t) = 1$.

(iii) Bestem svaret på påvirkningen $u(t) = e^{2t}$.

(iv) Bestem svaret på påvirkningen $u(t) = \cos t$.

**Opgave 320** Betragt differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 25y = u' + 3u,$$

hvor $u$ er påvirkningen og $y$ er svaret.

(i) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$.

(ii) Bestem svaret på påvirkningen $u(t) = e^{-t}$.

(iii) Bestem svaret på påvirkningen $u(t) = e^t \cos t$ (vink: $e^t \cos t = \mathrm{Re}\,(e^{(1+i)t})$).

**Opgave 325** Betragt differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^6x}{\mathrm{d}t^6} - x = e^t \cos t\ .$$

(i) Bestem samtlige komplekse løsninger til den tilsvarende homogene ligning.

(ii) Bestem samtlige reelle løsninger til den tilsvarende homogene ligning.

(iii) Find samtlige reelle løsninger til den inhomogene ligning
(vink: $e^t \cos t = \mathrm{Re}\,(e^{(1+i)t})$.

**Opgave 326** Vi betragter differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{t}y = \sin t,\ \ t > 0.$$

Sæt

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

og bestem koefficienterne således at funktionen $y(t)$ bliver løsning til differentialligningen. For hvilke $t$-værdier er denne løsning gyldig?

## F.4 Systemer af differentialligninger

**Opgave 401** Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

hvor $u(t)$ er påvirkningen og $y(t)$ er svaret.

(a) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$.

(b) Find svaret på påvirkningen $u(t) = e^{5t}$.

**Opgave 402** Vi betragter differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = x_2(t), \end{cases}$$

hvor $u(t)$ er påvirkningen og $y(t)$ er svaret.

(i) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$.

(ii) Find det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = e^{-t}$.

**Opgave 403** Vi betragter differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} + 2y = u(t), \tag{F.9}$$

hvor $u$ er påvirkningen og $y$ er svaret. Vi vil opfatte differentialligningen som et system bestående af én ligning.

(i) Find overføringsfunktionen $H(s)$.

(ii) Vis at systemet (F.9) er asymptotisk stabilt.

(iii) Bestem det stationære svar hørende til hver af påvirkningerne

$$u_n(t) = e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ifølge sætning 7.8 gælder nu, at hvis

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \frac{1}{2}} e^{int}, \tag{F.10}$$

så har (F.9) løsningen

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \frac{1}{2}} H(in) e^{int}. \tag{F.11}$$

**Opgaven fortsætter!**

Resultatet i (F.11) kan også opnås ved direkte udregning:

(iv) Vis ved indsættelse i differentialligningen (F.9) at funktionen $y$ givet ved (F.11) er løsning når $u$ er givet ved (F.10). Husk at angive hvilke resultater fra bogen du anvender.

**Opgave 404** Bestem overføringsfunktionen $H(s)$ hørende til differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ \quad y(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

**Opgave 408** Find ved hjælp af egenværdimetoden samtlige reelle løsninger til ligningen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

**Opgave 409**

(i) Find en fundamentalmatrix hørende til det homogene system

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(ii) Find den fuldstændige reelle løsning til systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**Opgave 410** Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

(a) Find samtlige reelle løsninger ved hjælp af egenværdimetoden.

(b) Find nu den løsning for hvilken $x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$.

**Opgave 411** Vi betragter differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \quad x_3 \\ \dot{x}_2 = \quad 2x_1 - x_3 \\ \dot{x}_3 = \quad -x_1 \end{cases} \tag{F.12}$$

(i) Find den fuldstændige komplekse løsning.

(ii) Find den fuldstændige reelle løsning.

(iii) Er systemet (F.12) stabilt?

(iv) Er systemet (F.12) asymptotisk stabilt?

**Opgave 413** Lad matricen $A$ være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Brug egenværdimetoden til at opskrive samtlige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\dot{x} = Ax.$$

**Opgave 414** Vi betragter ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(1) Find samtlige egenværdier og egenvektorer for systemmatricen. Fører egenværdimetoden til den fuldstændige løsning?

(2) Find en løsning af formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}e^{-t} + \mathbf{v}te^{-t}$$

med $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

(3) Opskriv den fuldstændige reelle løsning til systemet.

**Opgave 417**

(i) Find overføringsfunktionen for det lineære system

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

(ii) Find dernæst det stationære svar på påvirkningen $u(t) = \cos t$.

**Opgave 418**

(i) Find overføringsfunktionen for det lineære system

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

(ii) Find dernæst det stationære svar på påvirkningen $u(t) = \sin 2t$.

**Opgave 421** Bestem den fuldstændige reelle løsning til systemerne

(i) $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

**Opgave 422** Undersøg om følgende systemer er stabile, henh. asymptotisk stabile:

(i) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$

(ii) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$

(iii) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$

**Opgave 423** Vi betragter systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til systemet.

(ii) Bestem den løsning $\mathbf{x}$ for hvilken $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

**Opgave 424** Betragt systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = & \frac{3}{2}x - y - \frac{1}{2}z \\ \dot{y} = & -\frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{2}z \\ \dot{z} = & \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}z. \end{cases}$$

(i) Benyt Maple til at finde egenværdierne og de tilhørende egenvektorer for systemmatricen.

(ii) Bestem nu den fuldstændige reelle løsning til differentialligningssystemet.

**Opgave 425** Undersøg om følgende systemer er asymptotisk stabile:

(i) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t).$

(ii) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t).$

(iii) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t).$

**Opgave 426** Matricen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & -5 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

har egenværdierne $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ .

(i) Find de tilsvarende egenvektorer.

(ii) Opskriv samtlige komplekse løsninger til differentialligningssystemet

$$\dot{x} = Ax.$$

(iii) Opskriv alle reelle løsninger til differentialligningssystemet.

**Opgave 427** Angiv de værdier af parameteren $a$ for hvilke det lineære system

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1+a^2 \\ 0 & -a & 0 & a \\ -a & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$$

er asymptotisk stabilt.

**Opgave 428** Undersøg om følgende systemer er asymptotisk stabile:

(i) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t),$

(ii) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t),$

(iii) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos 2t \\ \sin t \end{pmatrix}.$

(iv) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t).$

**Opgave 429** Undersøg om følgende systemer er stabile, henh. asymptotisk stabile:

(i) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$

(ii) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$

(iii) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$

**Opgave 430** Der er givet det lineære system

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \\ \qquad y = x_1 \end{cases}$$

med påvirkning $u(t)$ og svar $y(t)$.

(a) Find systemets overføringsfunktion $H(s)$.

(b) Find amplitudekarakteristikken $A(\omega)$.

(c) Skitsér $A(\omega)$.

(d) Find og skitsér fasekarakteristikken $\varphi(\omega)$.

(e) Find og skitsér det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = \sin t$.

**Opgave 431** Betragt det inhomogene system

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestem en fundamentalmatrix for det tilsvarende homogene system.

(ii) Vis ved indsættelse at gættemetoden med $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$ ikke kan anvendes til at bestemme en partikulær løsning til det inhomogene system.

(iii) Bestem samtlige reelle løsninger til det inhomogene system ved at benytte den generelle løsningsformel.

(iv) Bestem den partikulære løsning til det inhomogene system for hvilken $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Opgave 432** Vis at systemerne

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

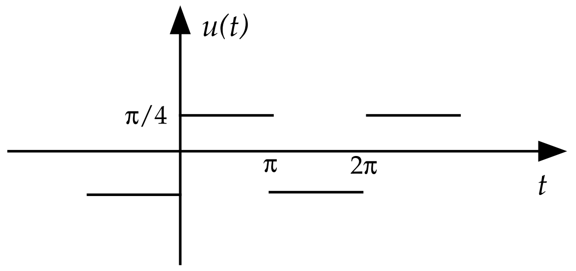
er asymptotisk stabile.

**Opgave 433** Find overføringsfunktionen for det lineære system

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = x_2(t). \end{cases}$$

Find dernæst det stationære svar på påvirkningen $u(t) = \cos t$.

**Opgave 434**




Firkantfunktionen $u(t)$ på figuren har Fourierrækken

$$u \sim \sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t....$$

Signalet $u(t)$ anvendes som påvirkning på et stabilt lineært system med overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Det stationære svar betegnes $y(t)$.

(i) Find Fourierkoefficienterne $a_1$ og $b_1$ i Fourierrækken for $y(t)$.

Lad $y_3(t)$ betegne det stationære svar når påvirkningen ændres til

$$u_3(t) = \sin t + \frac{1}{3}\sin 3t.$$

(ii) Find effekten $P(y_3)$.

**Opgave 435** Angiv for hver værdi af parameteren $a$ om det lineære system

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

er stabilt, asymptotisk stabilt, eller instabilt.

**Opgave 436** Bestem samtlige stationære punkter for differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - x + 2y + 1 \\ x - y - 1 \end{pmatrix}.$$

**Opgave 437** Bestem samtlige stationære punkter for systemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-x^2}{1+y^2} \\ \frac{1-y^2}{1+x^2} \end{pmatrix}.$$

Undersøg om det stationære punkt i 1.kvadrant er asymptotisk stabilt.

**Opgave 438** Vis at punktet $(1,2)$ er et stationært punkt for differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 3xy + y^2 + x \\ 2x^2 + xy - 2y \end{pmatrix}.$$

Undersøg om det stationære punkt er asymptotisk stabilt.

**Opgave 439** Betragt for $x > 0, y > 0$ differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 4\sqrt{x} - \sqrt{y} \\ 6 - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y} \end{pmatrix}.$$

Vis at systemet har netop ét stationært punkt, og undersøg om det er asymptotisk stabilt.

**Opgave 440** Bestem samtlige stationære punkter for systemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - y^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

**Opgave 441** Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2y - 8 \\ 4x - 2y + 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Er systemet lineært eller ulineært?

(ii) Bestem funktionalmatricen.

(iii) Bestem alle de stationære punkter.

(iv) Afgør for hvert af de stationære punkter om det er asymptotisk stabilt.

(v) Tegn et faseportræt, med speciel fokus på løsningskurver der svarer til begyndelsesværdier tæt på de stationære punkter.

**Opgave 442** Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x + 2y) \\ \alpha(1 - e^x) - 2\tan y \end{pmatrix},$$

hvor $x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, og hvor $\alpha \in \mathbb{R}$ er en konstant. Angiv de værdier af $\alpha \neq 1$, for hvilke $(0,0)$ er et asymptotisk stabilt stationært punkt.

**Opgave 443** For følgende systemer $(a)-(d)$, afgør om de er lineære eller ikke-lineære.

$(a)$ $\exp(t)\ddot{x} - \dot{x} + \sin(t)x = 0$

$(b)$ $\ddot{x} - 2x\dot{x} - tx = 0$

$(c)$ $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \cos(\omega t)x + 2w \end{pmatrix}$

$(d)$ $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \sin(x) \end{pmatrix}$

$(e)$ $\dfrac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + (E - V(x))\psi(x) = 0$

**Opgave 444** Vis for Lorentz-systemet i (3.10) at hvis $(x(t), y(t), z(t))$ er en løsning så er $(-x(t), -y(t), z(t))$ også en løsning. Der er altså en $xy$-symmetri i fasestrømmen.

**Opgave 445** Vis for Lorentz systemet i (3.10) at en løsningskurve der begynder på $z$-aksen forbliver på $z$-aksen, altså at $z$-aksen er en invariant linje for fasestrømmen.

**Opgave 446**

(i) Find, for $r = 2$ og $s = b = 1$ alle stationære punkter for Lorentz systemet i (3.10).

(ii) Find, for $r > 1$ og positive værdier af $s$ og $b$ alle stationære punkter for Lorentz systemet. Hvad sker der når $r \to 1^+$ ?

**Opgave 447** Betragt systemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & -x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = & -x_2 + x_1 x_2 \end{cases}$$

(i) Er systemet lineært eller ulineært?

(ii) Bestem funktionalmatricen.

(iii) Vis, at de stationære punkter er $(x_1, x_2) = (1, -1)$ og $(x_1, x_2) = (0, 0)$ (der skal altså også redegøres for at der ikke er andre).

(iv) Afgør for hvert af de stationære punkter om det er asymptotisk stabilt.

(v) Tegn et faseportræt, med speciel fokus på løsningskurver der svarer til begyndelsesbetingelser tæt på de stationære punkter.

## F.5 Eksamensopgaver

**Opgave 501** (kursus 01030) Betragt differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 2\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = u' + u,$$

hvor $u$ er påvirkningen og $y$ er svaret.

(i) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$.

(ii) Bestem svaret på påvirkningen $u(t) = \cos t$.

**Opgave 502** (kursus 01030) Lad $a \in \mathbb{R}$, og betragt differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem de værdier af $a$ for hvilke systemet er asymptotisk stabilt.

(ii) Undersøg om systemet er stabilt for $a = 0$.

**Opgave 503** (kursus 01030) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$$

er konvergent, og bestem dens sum. Undersøg dernæst om rækken er betinget konvergent eller absolut konvergent.

**Opgave 504** (kursus 01030) Funktionen $f$, som er periodisk med periode $2\pi$, er i intervallet $]-\pi,\pi]$ givet ved

$$f(t) = \frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3), -\pi < t \leq \pi.$$

(i) Skitsér grafen for $f$ på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$.

(ii) Vis, at $f$ har Fourierrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nt.$$

Vink: det oplyses at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$\begin{aligned} \int t \sin nt \, dt &= \frac{\sin nt}{n^2} - t\frac{\cos nt}{n} \\ \int t^3 \sin nt \, dt &= -6\frac{\sin nt}{n^4} + 6t\frac{\cos nt}{n^3} + 3t^2\frac{\sin nt}{n^2} - t^3\frac{\cos nt}{n}. \end{aligned}$$

**Opgaven fortsætter!**

(iii) Er Fourierrækken konvergent med sum $f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$?

(iv) Vis, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

**Opgave 505** (kursus 01030) Betragt differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = u'' + 5u' + 6u,$$

hvor $u$ er påvirkningen og $y$ er svaret.

(i) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$.

(ii) Bestem svaret på påvirkningen $u(t) = \sin 3t$.

**Opgave 506** (kursus 01030) Bestem den fuldstændige reelle løsning til systemerne

(i) $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 20 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$

(ii) $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 20 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 \\ -2 \end{pmatrix} e^t$

**Opgave 507** (kursus 01030) Lad $a \in \mathbb{R}$, og betragt differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestem de værdier af $a$ for hvilke systemet er asymptotisk stabilt.

(ii) Undersøg om systemet er stabilt for $a = -1$.

(iii) Undersøg om systemet er stabilt for $a \geq 0$.

**Opgave 508** (kursus 01030)

(i) Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent. (Vink: det oplyses at $\tan x > x$ for $x \in ]0, \pi/2[$).

(ii) Vis at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$$

er uniformt konvergent på intervallet $[-1, 1]$. (Vink: det oplyses at $|\sin x| \leq |x|$ for alle $x \in \mathbb{R}$).

**Opgave 509** (kursus 01030) Betragt potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n(n^2+1)}.$$

(i) Bestem potensrækkens konvergensradius $\rho$.

(ii) Vis at potensrækken er konvergent for $x = \pm\rho$.

(iii) For et givet $x \in [-\rho, \rho]$ lader vi $s(x)$ betegne potensrækkens sum. Vis, at

$$\frac{\pi}{4} \leq s(\sqrt{3}) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

**Opgave 510** (kursus 01030) Funktionen $f$, som er ulige og periodisk med periode $2\pi$, er i intervallet $[0, \pi]$ givet ved

$$f(t) = \frac{\pi}{8}(\pi t - t^2), 0 \leq t \leq \pi.$$

(i) Skitsér grafen for $f$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

(ii) Vis, at $f$ har Fourierrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)t)}{(2n-1)^3}.$$

Vink: det oplyses at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$\int t \sin nt \, dt = \frac{\sin nt}{n^2} - t\frac{\cos nt}{n}$$

og

$$\int t^2 \sin nt \, dt = 2\frac{\cos nt}{n^3} + 2t\frac{\sin nt}{n^2} - t^2\frac{\cos nt}{n}.$$

(iii) Er Fourierrækken konvergent med sum $f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$?

(iv) Vis, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**Danmarks Tekniske Universitet**

Side 1 af 3 sider

Skriftlig 2-timers prøve, den 10.12.2005

Kursets navn: Matematik 2 Kursus nr.: 01035

Tilladte hjælpemidler: alle

Vægtning: Opgave 511: 25%, Opgave 512: 20%, Opgave 513: 20%, Opgave 514: 35%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

**Opgave 511** Betragt differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = u' + u; \tag{F.13}$$

her er $u$ påvirkningen, og $y$ er den søgte løsning.

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til den homogene differentialligning hørende til (F.13).

(ii) Bestem overføringsfunktionen hørende til (F.13).

(iii) Bestem det stationære svar hørende til påvirkningen

$$u(t) = e^{2t}.$$

(iv) Opskriv den fuldstændige reelle løsning til (F.13) når $u(t) = e^{2t}$.

**Opgave 512** Vi betragter differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = & 2x_1 + x_2 \end{cases} \tag{F.14}$$

(i) Bestem den fuldstændige komplekse løsning.

(ii) Bestem den fuldstændige reelle løsning.

(iii) Er systemet (F.14) stabilt?

**Opgave 513**

(i) Er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ konvergent?

(ii) Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvorom det vides at den $N$'te afsnitssum er

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = 1 + e^N.$$

Er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent?

(iii) Find konvergensradius for rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \, n^2 x^n.$$

**Opgave 514** Vi betragter et differentialligningssystem med svarligning, givet ved

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ \quad y = x_1 + x_2, \end{cases} \tag{F.15}$$

hvor $u(t)$ er påvirkningen og $y(t)$ er svaret.

(i) Vis at systemet (F.15) er asymptotisk stabilt.

(ii) Vis at overføringsfunktionen for systemet (F.15) er givet ved

$$H(s) = \frac{2}{2+s}, \; s \notin \{-2, -4\}.$$

Vi betragter nu den $2\pi$-periodiske påvirkning givet ved

$$u(t) = t(\pi - t)(\pi + t), \; t \in [-\pi, \pi[. \tag{F.16}$$

Det oplyses (skal ikke vises) at Fourierrækken for $u$ er

$$u(t) \sim -12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nt)}{n^3}. \tag{F.17}$$

(iii) Skitser funktionen $u$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

(iv) Gør rede for at tegnet "$\sim$" i (F.17) kan erstattes af "$=$".

(v) Hvor stor en procentdel af effekten af funktionen $u$ er indeholdt i Fourierrækkens første led?

(vi) Find, udtrykt ved en Fourierrække, en løsning til (F.15) når påvirkningen $u$ er givet ved (F.16).

**Danmarks Tekniske Universitet**

Side 1 af 3 sider

Skriftlig 2-timers prøve, den 17.5.2006

Kursets navn: Matematik 2 Kursus nr.: 01035

Tilladte hjælpemidler: alle

Vægtning: Opgave 515: 25%, Opgave 516: 25%, Opgave 517: 20%, Opgave 518: 30%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

**Opgave 515** Betragt differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 16y = u' + u; \tag{F.18}$$

her er $u$ påvirkningen, og $y$ er den søgte løsning.

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til den homogene differentialligning hørende til (F.18).

(ii) Bestem overføringsfunktionen hørende til (F.18).

(iii) Bestem det stationære svar hørende til påvirkningen

$$u(t) = e^t.$$

(iv) Bestem en løsning hørende til påvirkningen

$$u(t) = e^{3t} + 3e^t.$$

**Opgave 516** Vi betragter differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & -x_1^2 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = & -2x_1 - x_2 \end{cases} \tag{F.19}$$

(i) Er systemet (F.19) lineært eller ulineært?

(ii) Bestem funktionalmatricen hørende til systemet (F.19).

(iii) Bestem samtlige stationære punkter for systemet (F.19).

(iv) Afgør for hvert stationært punkt om det er asymptotisk stabilt eller ej.

**Opgave 517**

(i) Gør rede for at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}} \tag{F.20}$$

er konvergent.

(ii) Betragt den $N$'te afsnitssum

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Find $N$ således at $S_N$ giver en tilnærmet værdi for summen af rækken i (F.20) med en fejl på højst 0.1.

(iii) Er rækken i (F.20) betinget konvergent eller absolut konvergent?

**Opgave 518** Om en $2\pi$-periodisk, stykkevis differentiabel og kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oplyses at Fourierkoefficienterne er givet ved

$$a_n = 0 \ \text{ for alle } n, \text{ og } \ b_n = \frac{1}{n^3}, \ n \in \mathbb{N}.$$

(i) Opstil Fourierrækken på kompleks form.

I resten af opgaven er det frivilligt om du vil arbejde med Fourierrækken på reel eller kompleks form.

(ii) Bestem den $N$'te afsnitssum $S_N$ således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 0.1, \ \forall x.$$

(iii) Lad $P(f)$ betegne effekten af funktionen $f$. Vis, at

$$P(f) > \frac{1}{2}.$$

(iv) Bestem den $N$'te afsnitssum $S_N$ således at $S_N$ indeholder mindst 99.9% af effekten af $f$.

*Vink: argumenter via sætning 7.12 for at det er nok at vælge $N$ således at*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \leq 0.001.$$

Opgavesættet er slut!

# Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 4 sider

Skriftlig 2-timers prøve, den 16.12.2006

Kursets navn: Matematik 2 Kursus nr.: 01035

Tilladte hjælpemidler: alle

Vægtning: Opgave 519: 20%, Opgave 520: 25%, Opgave 521: 30%, Opgave 522: 25%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

**Opgave 519** Betragt differentialligningen

$$y''' - y' = u' + u; \tag{F.21}$$

her er $u$ påvirkningen, og $y$ er den søgte løsning.

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til den homogene differentialligning hørende til (F.21).

(ii) Bestem overføringsfunktionen hørende til (F.21).

(iii) Bestem det stationære svar hørende til påvirkningen

$$u(t) = e^{2t}.$$

(iv) Bestem en løsning til (F.21) hørende til påvirkningen

$$u(t) = e^{-t}.$$

(*Vink: regn højresiden i* (F.21) *ud for* $u(t) = e^{-t}$.)

**Opgave 520** Vi betragter et differentialligningssystem givet ved

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ \\ y = x_2, \end{cases} \tag{F.22}$$

hvor $u(t)$ er påvirkningen og $y(t)$ er svaret.

**Opgaven fortsætter!**

(i) Vis at overføringsfunktionen for systemet (F.22) er givet ved

$$H(s) = \frac{1}{1+s}, \ s \neq -1.$$

(ii) Er systemet (F.22) asymptotisk stabilt?

(iii) Bestem amplitudekarakteristikken for systemet (F.22).

(iv) Bestem fasekarakteristikken for systemet (F.22).

**Opgave 521** Denne opgave handler om den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5+1}. \tag{F.23}$$

(i) Vis at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$\frac{n}{n^5+1} \leq \frac{1}{n^4}. \tag{F.24}$$

(ii) Gør nu rede for at rækken i (F.23) er konvergent.

(iii) Det oplyses nu (skal *ikke* vises), at der for ethvert $N \in \mathbb{N}$ gælder at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \frac{4}{3} \frac{1}{(N+1)^3}. \tag{F.25}$$

Bestem ved brug af (F.24) og (F.25) en værdi for $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n}{n^5+1} \leq 0.05.$$

(iv) Brug resultatet i (iii) til at bestemme summen af rækken i (F.23) med en fejl på højst 0.05.

**Opgave 522** Vi betragter den $2\pi$-periodiske funktion $u$ givet ved

$$u(t) = \frac{1}{3}t^3, \ t \in [-\pi, \pi[.$$

(i) Skitser funktionen $u$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

(ii) Konvergerer Fourierrækken for $u$ mod $u(t)$ for alle $t \in ]-\pi, \pi[$? Svaret skal begrundes.

(iii) Hvad konvergerer Fourierrækken mod for $t = \pi$?

(iv) Fourierkoefficienterne på kompleks form betegnes som sædvanlig med $c_n, n \in \mathbb{Z}$. Vis at $c_{-n} = -c_n$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Opgavesættet er slut!

# Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 5 sider

Skriftlig 2-timers prøve, den 16.5.2007

Kursets navn: Matematik 2 Kursus nr.: 01035

Tilladte hjælpemidler: alle

Vægtning: Opgave 523: 16%, Opgave 524: 24%, Opgave 525: 25%, Opgave 526: 35%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point kræves at mellemregninger i opgave 525 og 526 medtages i rimeligt omfang. **Løsningerne til opgave 523 og 524 angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregningerne hørende til opgave 523 og 524 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke"gives 0 point, og ved et forkert svar gives -2 point.**

**Opgave 523** Betragt potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^n}(-1)^n x^n.$$

(i) Bestem konvergensradius $\rho$. Svaret er:

a) $\rho = 0$; b) $\rho = \infty$; c) $\rho = 2$; d) $\rho = \frac{1}{2}$; e) $\rho = 1$; f) ved ikke.

(ii) Undersøg for $x = 1$ om potensrækken er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent. Svaret er:

a) absolut konvergent; b) betinget konvergent; c) divergent;
d) ved ikke.

(iii) Undersøg for $x = -2$ om potensrækken er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent. Svaret er:

a) absolut konvergent; b) betinget konvergent; c) divergent; d) ved ikke.

**Opgave 524** Idet $a$ betegner en reel konstant betragtes det homogene lineære system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -4 \\ 2 & -2a \end{pmatrix}. \tag{F.26}$$

(i) Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke systemet (F.26) er asymptotisk stabilt. Svaret er

a) $0 < a < 1$;
b) $-2 < a < 2$;
c) $-2 < a < 0$;
d) $0 < a < 2$;
e) $-1 < a < 1$;
f) ved ikke.

(ii) Undersøg om systemet (F.26) er stabilt for værdierne $a = 0, a = 1$, og $a = 2$. Svaret er:

*a)* stabilt for alle 3 værdier af $a$
*b)* ustabilt for alle 3 værdier af $a$
*c)* stabilt for $a = 0$ og $a = 1$, men ustabilt for $a = 2$
*d)* stabilt for $a = 0$ og $a = 2$, men ustabilt for $a = 1$
*e)* ved ikke.

(iii) Bestem den fuldstændige reelle løsning til (F.26) for $a = 3$. Svaret er:

*a)* $\mathbf{x} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

*b)* $\mathbf{x} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

*c)* $\mathbf{x} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

*d)* $\mathbf{x} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

*e)* $\mathbf{x} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

*f)* $\mathbf{x} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

*g)* ved ikke.

**Opgave 525** Betragt differentialligningen

$$y'''' + 5y'' - 36y = u'' + 11u, \tag{F.27}$$

hvor $u$ er påvirkningen, og $y$ er den søgte løsning.

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til den homogene differentialligning hørende til (F.27).

(ii) Bestem overføringsfunktionen hørende til (F.27).

(iii) Bestem det stationære svar hørende til påvirkningen

$$u(t) = e^{it}.$$

(iv) Bestem en løsning hørende til påvirkningen

$$u(t) = 12 \sin t.$$

(v) Sæt nu $u(t) = e^{2t}$. Undersøg om differentialligningen (F.27) har en løsning af formen

$$y(t) = Ce^{2t}$$

for en konstant $C \in \mathbb{R}$.

**Opgave 526** En $2\pi$-periodisk, stykkevis differentiabel, og kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved at den har Fourierrækken

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos nx.$$

(i) Er funktionen $f$ lige, ulige, eller ingen af delene? Svaret skal begrundes.

(ii) Bestem Fourierkoefficienterne på kompleks form.

(iii) Bestem en værdi for $N \in \mathbb{N}$ således at den $N$'te afsnitssum $S_N$ opfylder at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 0.01, \ \forall x.$$

(iv) Beregn $f(\frac{\pi}{2})$.

(v) Beregn effekten $P(f)$.

Opgavesættet er slut!

# Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 7 sider

Skriftlig 2-timers prøve, den 10.12.2007

Kursets navn: Matematik 2 Kursus nr.: 01035

Tilladte hjælpemidler: alle

**Vægtning:**
Opgave 527: 12%, Opgave 528: 16%,
Opgave 529: 24%, Opgave 530: 24%, Opgave 531: 24%
Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point kræves at mellemregninger i opgave 529, 530 og 531 medtages i rimeligt omfang. **Løsningerne til opgave 527 og 528 angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregningerne hørende til opgave 527 og 528 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke"gives 0 point, og ved et forkert svar gives -1 point.**

**Opgave 527** Betragt differentialligningen

$$y'' - 5y' + 6y = u' - 2u,$$

hvor $u$ er påvirkningen, og $y$ er den søgte løsning.

(i) Bestem overføringsfunktionen. Svaret er:

$a)$ $H(s) = \dfrac{1}{s-2}, \quad s \neq 2$

$b)$ $H(s) = \dfrac{1}{s-3}, \quad s \neq 3$

$c)$ $H(s) = \dfrac{1}{s-3}, \quad s \notin \{2, 3\}$

$d)$ ved ikke.

(ii) Bestem det stationære svar hørende til påvirkningen

$$u(t) = e^t.$$

Svaret er

$a)$ $y(t) = 0$; $b)$ $y(t) = -\frac{1}{2}e^t$; $c)$ $y(t) = -e^t$; $d)$ ved ikke.

**Opgaven fortsætter!**

(iii) Vi undersøger om differentialligningen har en løsning når $u(t) = e^{2t}$. Hvilken af følgende påstande er rigtig?

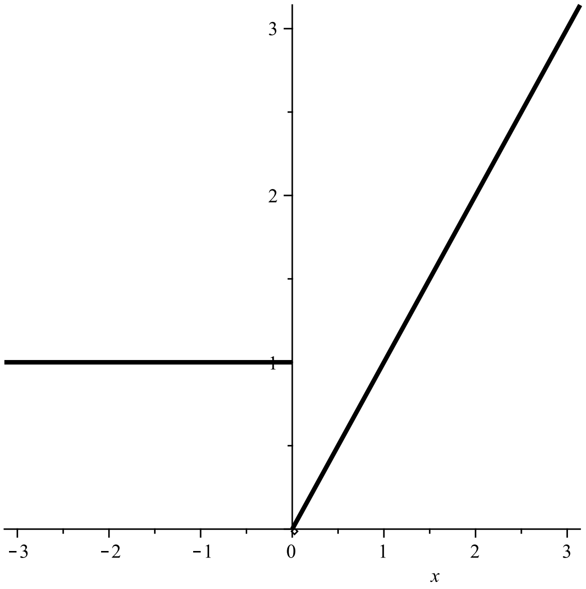
*a*) $y(t) = e^t$ er en løsning

*b*) $y(t) = -e^{2t}$ er en løsning

*c*) differentialligningen har ingen løsninger

*d*) ved ikke.

**Opgave 528** Vi betragter en $2\pi$-periodisk funktion $f$, hvis graf på intervallet $]-\pi, \pi[$ er vist nedenfor.




(i) Afgør om funktionen $f$ er lige, ulige, eller ingen af delene. Svaret er

*a*) funktionen er lige.

*b*) funktionen er ulige.

*c*) funktionen er hverken lige eller ulige.

*d*) ved ikke.

(ii) Afgør om Fourierrækken er konvergent for $x = -2$, og hvad summen i bekræftende fald er. Svaret er

*a*) Fourierrækken er divergent for $x = -2$.

*b*) Fourierrækken er konvergent for $x = -2$, med sum 0

*c*) Fourierrækken er konvergent for $x = -2$, med sum 1

*d*) ved ikke.

**Opgaven fortsætter!**

(iii) Afgør om Fourierrækken er konvergent for $x = 0$, og hvad summen i bekræftende fald er. Svaret er

- *a*) Fourierrækken er divergent for $x = 0$.
- *b*) Fourierrækken er konvergent for $x = 0$, med sum $1/2$
- *c*) Fourierrækken er konvergent for $x = 0$, med sum $1$
- *d*) ved ikke.

(iv) Hvilken af følgende påstande er rigtig?

- *a*) Fourierrækken er konvergent for alle $x$, men ikke uniformt konvergent
- *b*) Fourierrækken er uniformt konvergent
- *c*) Fourierrækken er ikke konvergent for alle $x$
- *d*) ved ikke.

**Opgave 529** Lad $a \in \mathbb{R}$, og betragt differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -a & a \end{pmatrix}.$$

(i) Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke systemet er asymptotisk stabilt.

(ii) Undersøg om systemet er stabilt for $a = 0$.

Det oplyses **(skal ikke vises)** at systemet med svarligning, givet ved

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\top} \mathbf{x}. \end{cases} \tag{F.28}$$

har overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{4+s}{s^2+2s+2}, \quad s \neq -1 \pm i.$$

Det oplyses endvidere **(skal ikke vises)** at den $2\pi$-periodiske funktion givet ved $u(t) = t^2,\ t \in [-\pi, \pi[$ har Fourierrækken

$$u(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{int}.$$

(iii) Angiv Fourierrækken for en løsning til systemet (F.28) med denne påvirkning.

**Opgave 530** Denne opgave handler om beregning af integralet

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx.$$

**Opgaven fortsætter!**

(i) Vis ved hjælp af potensrækken for $\sin(x)$ at

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Vis at

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}.$$

(iii) Bestem en tilnærmet værdi for integralet

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx,$$

med en afvigelse på højst $10^{-4}$.

**Opgave 531** Vi betragter differentialligningen

$$t\,\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

(i) Vis at hvis differentialligningen har en løsning på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

så gælder at

$$-\,c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n+1}(n+1)n - c_n)t^n = 0. \tag{F.29}$$

(ii) Vis med udgangspunkt i (F.29) at koefficienterne $c_n$ skal opfylde at

$$c_0 = 0, \;\text{og for}\;\; n \geq 1, \;\; c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)n} c_n. \tag{F.30}$$

Med udgangspunkt i (F.30) kan man vise **(skal ikke gøres)** at differentialligningen har løsningen

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n-1)!} t^n \tag{F.31}$$

(iii) Lad $S_N(t)$ betegne den $N$'te afsnitssum af rækken i (F.31). Bestem $N$ således at

$$|y(t) - S_N(t)| \leq 10^{-4}$$

for alle $t \in [0, 1]$.

Opgavesættet er slut!

# Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 5 sider

Skriftlig 2-timers prøve den 22.05.2008

Kursets navn: Matematik 2

Kursus nr.: 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle

**Vægtning:**
Opgave 532: 12%, Opgave 533: 16%,
Opgave 534: 24%, Opgave 535: 24%, Opgave 536: 24%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point kræves at mellemregningerne i opgave 534, 535 og 536 medtages i rimelig omfang.

**Løsningerne til opgave 532 og 533 angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen Udregningerne hørende til opgave 532 og 533 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret ”ved ikke”gives 0 point, og ved et forkert svar gives -1 point.**

**Opgave 532** Betragt potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+1} x^n.$$

(i) Bestem konvergensradius $\rho$. Svaret er
a) $\rho = \frac{1}{3}$; b) $\rho = 3$; c) $\rho = \infty$; d) ved ikke.

(ii) Bestem potensrækkens sum for $x = 0$. Svaret er
a) 0; b) $\frac{1}{4}$;
c) $\frac{1}{2}$; d) ved ikke.

(iii) Undersøg for $x = -3$ om potensrækken er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent. Svaret er

a) absolut konvergent; b) betinget konvergent; c) divergent;
d) ved ikke.

**Opgave 533** Vi betragter den $2\pi$-periodiske funktion $f$, for hvilken der gælder:

- $f(t)$ er en *lige* funktion.
- $f(t)$ er i intervallet $[0, \pi]$ givet ved

$$f(t) = \sin \frac{t}{2} \ .$$

(i) Bestem Fourierkoefficienten $a_0$ hørende til Fourierrækken for $f$. Svaret er
a) 0; b) $\frac{3}{\pi}$; c) $\frac{4}{\pi}$; d) ved ikke.

(ii) Bestem for alle $t \in \mathbb{R}$, summen af Fourierrækken for funktionen $f$. Svaret er
a) $\left|\sin \frac{t}{2}\right|$ , $t \in \mathbb{R}$; b) $\sin \frac{t}{2}$ , $t \in \mathbb{R}$; c) $\cos \frac{t}{2}$ , $t \in \mathbb{R}$; d) ved ikke.

(iii) Beregn effekten af funktionen $f(t)$. Svaret er
a) 0; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) ved ikke.

(iv) Det oplyses nu, at Fourierkoefficienterne på kompleks form i Fourierrækken for $f$ er givet ved

$$c_n = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2 - 1} \ , \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Bestem den mindste værdi af $N$ for hvilken den $N$'te afsnitssum $S_N$ i Fourierrækken for $f$ indeholder mindst 99.5% af effekten i $f$. (Vink: Bestem ved direkte udregning effekten af de første afsnitssummer $S_N$.) Svaret er
a) $N = 1$; b) $N = 2$; c) $N = 3$; d) ved ikke

**Opgave 534** Betragt det ulineære differentialligningssystem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1 - 3)(x_2 + 1) \end{cases} \tag{F.32}$$

(i) Bestem funktionalmatricen for systemet (F.32).

(ii) Bestem samtlige stationære punkter hørende til systemet (F.32).

(iii) Afgør for hvert stationært punkt om det er asymptotisk stabilt eller ej.

**Opgave 535** Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2} \ . \tag{F.33}$$

(i) Vis, at rækken (F.33) er konvergent.

(ii) Vis, at

$$\frac{1}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2} \leq \frac{1}{2} \ .$$

Vink: Benyt integralkriteriet.

(iii) Vis, at funktionen $f$ defineret ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{(n^2+1)^2} \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

er kontinuert.

**Opgave 536** Betragt det lineære system

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t) \\ \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{F.34}$$

(i) Bestem overføringsfunktionen for systemet (F.34).

Lad nu påvirkningen $u(t)$ være en $2\pi$-periodisk, stykkevis differentiabel og kontinuert funktion med Fourierrækken

$$u(t) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} \cos(nt) \ , \quad t \in \mathbb{R}. \tag{F.35}$$

(ii) Gør rede for, at Fourierkoefficienterne på kompleks form for funktionen $u$ er givet ved

$$c_n = \frac{1}{4n^2-1} \ , \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Bestem Fourierrækken for en løsning til systemet (F.34) med påvirkningen givet ved (F.35).

Opgavesættet er slut!

# Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 5 sider

Skriftlig 2-timers prøve den 8.12.2008

Kursets navn: Matematik 2

Kursus nr.: 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle

**Vægtning:**
Opgave 537: 16%, Opgave 538: 12%,
Opgave 539: 24%, Opgave 540: 24%, Opgave 541: 24%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point kræves at mellemregningerne i opgave 539, 540 og 541 medtages i rimeligt omfang.

**Opgave 537 og 538 er multiple-choice opgaver og svaret angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregningerne hørende til opgave 537 og 538 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke"gives 0 point, og ved et forkert svar gives -1 point.**

**Opgave 537** Betragt differentialligningen

$$y''' + 2y'' + y' = u'' + 2u' + u \ , \tag{F.36}$$

hvor $u$ er påvirkningen og $y$ er den søgte løsning.

(i) Bestem overføringsfunktionen. Svaret er
a) $H(s) = \dfrac{1}{s}$ , $s \notin \{0, -1\}$; b) $H(s) = \dfrac{1}{s}$ , $s \neq 0$
c) $H(s) = \dfrac{1}{s+1}$ , $s \neq -1$; d) ved ikke.

(ii) Bestem det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = \cos t$. Svaret er
a) $y(t) = \cos t$; b) $y(t) = \sin t$; c) $y(t) = \sin t - \cos t$; d) ved ikke.

(iii) Bestem den fuldstændige reelle løsning til den homogene differentialligning hørende til (F.36). Svaret er
a) $y(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3t^2e^{-t},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$
b) $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-t} + c_3,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$
c) $y(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$
d) ved ikke.

**Opgaven fortsætter!**

(iv) Vi undersøger om differentialligningen (F.36) har en løsning når $u(t) = e^{-t}$. Hvilken af følgende påstande er rigtig?
a) Differentialligningen har en og kun én løsning af formen $y(t) = ce^{-t}$, hvor $c$ er en reel konstant
b) Differentialligningen har mere end én løsning af formen $y(t) = ce^{-t}$, hvor $c$ er en reel konstant
c) Differentialligningen har ingen løsninger
d) ved ikke.

**Opgave 538** Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) \ . \tag{F.37}$$

(i) Hvilken information giver $n$'te leds kriteriet om rækkens konvergensforhold? Svaret er
a) Rækken er konvergent; b) Rækken er divergent
c) Man kan ikke konkludere noget; d) ved ikke.

(ii) Det oplyses nu (skal *ikke* vises), at rækken (F.37) har den $N$'te afsnitssum

$$S_N = \ln(N+1) \ , \quad N \in \mathbb{N} \ . \tag{F.38}$$

Hvilken information kan man ud fra $S_N$ givet ved (F.38) udlede om konvergensforholdene for rækken (F.37)? Svaret er
a) Rækken er konvergent; b) Rækken er divergent
c) Man kan ikke konkludere noget; d) ved ikke.

Betragt nu rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{1}{n}) \ . \tag{F.39}$$

(iii) Hvilken information giver Leibniz' kriterium om konvergensforholdene for rækken (F.39)? Svaret er
a) Rækken er konvergent; b) Rækken er divergent
c) Man kan ikke konkludere noget; d) ved ikke.

**Opgave 539** Det oplyses (skal *ikke* vises), at potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} x^{n+2} \tag{F.40}$$

har konvergensradius $\rho = 1$. Lad $f(x)$ betegne sumfunktionen for potensrækken (F.40).

(i) Vis ved brug af potensrækken for $\ln(1+x)$ (se appendiks B), at

$$f'(x) = x - \ln(1+x), \quad x \in \,]-1, 1[ \ .$$

**Opgaven fortsætter!**

(ii) Bestem sumfunktionen $f(x)$ ved hjælp af resultatet i (i).

(iii) Undersøg om (F.40) er uniformt konvergent i intervallet $[-1, 1]$ .

**Opgave 540** Lad $f$ betegne den $2\pi$-periodiske funktion, der i intervallet $]0, 2\pi]$ er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{2}x \ , \quad 0 < x \leq 2\pi.$$

(i) Vis, at Fourierrækken for $f$ er givet ved

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \ . \tag{F.41}$$

Vink: Det oplyses, at for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\int_0^{2\pi} x\cos(nx)dx = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^{2\pi} x\sin(nx)dx = -\frac{2\pi}{n} \ .$$

(ii) Bestem for $x = 2\pi$ og for $x = 8$ summen af Fourierrækken (F.41).

(iii) Bestem summen af rækken

$$\sin(4) + \frac{\sin(8)}{2} + \frac{\sin(12)}{3} + \frac{\sin(16)}{4} + \cdots$$

ved at indsætte en passende $x$-værdi i Fourierrækken (F.41).

**Opgave 541** Betragt det lineære system

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -2 & a & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \ , \tag{F.42}$$

hvor $a$ er et reelt tal. Det oplyses, at det karakteristiske polynomium for systemmatricen kan skrives på formen

$$P(\lambda) = -(\lambda - a)(\lambda^2 + 5\lambda + 6 + a).$$

(i) Bestem de værdier af $a$ for hvilke systemet (F.42) er asymptotisk stabilt.

(ii) Undersøg for $a = -6$ om systemet (F.42) er stabilt.

(iii) Bestem for $a = -6$ den fuldstændige reelle løsning til systemet (F.42).
Vink: Det oplyses, at

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

er lineært uafhængige egenvektorer for systemmatricen, når $a = -6$.

Opgavesættet er slut!

## F.6 Eksamensopgaver

# Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 5 sider

Skriftlig 2-timers prøve den 18.5.2009

Kursets navn: Matematik 2 Kursus nr.: 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle

**Vægtning:** Opgave 542: 16%, Opgave 543: 12%,
Opgave 544: 24%, Opgave 545: 24%, Opgave 546: 24%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point kræves at mellemregningerne i opgave 544, 545 og 546 medtages i rimeligt omfang.

**Opgave 542 og 543 er multiple-choice opgaver og svaret angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregningerne hørende til opgave 542 og 543 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke"gives 0 point, og ved et forkert svar gives -1 point.**

**Opgave 542** Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \,. \tag{1}$$

(i) Undersøg systemets stabilitetsforhold. Svaret er
   a) systemet (1) er asymptotisk stabilt
   b) systemet (1) er stabilt men ikke asymptotisk stabilt
   c) systemet (1) er ustabilt
   d) ved ikke.

**Opgaven fortsætter!**

(ii) Bestem den fuldstændige reelle løsning til systemet (1). Svaret er

a) $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

b) $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

c) $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

d) ved ikke.

Vi betragter nu det lineære system

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u \, , \\ \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \, . \end{cases} \qquad (2)$$

med påvirkning $u(t)$ og svar $y(t)$. Det oplyses, at systemets overføringsfunktion er givet ved

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2 + 6s + 13} \ , \ s \in \mathbb{C} \setminus \{-3 \pm 2i\} \, .$$

(iii) Bestem for systemet (2) det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = e^{-2t}$. Svaret er

a) $y(t) = e^{2t}$

b) $y(t) = e^{-2t}$

c) $y(t) = -e^{-2t}$

d) ved ikke.

(iv) Bestem for systemet (2) det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = 6 \sin t$. Svaret er

a) $y(t) = -\cos t - \sin t$

b) $y(t) = -\cos t + \sin t$

c) $y(t) = \cos t - \sin t$

d) ved ikke.

**Opgavesættet fortsætter!**

**Opgave 543** Betragt potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{\sqrt{n+1}} x^{2n} \ . \tag{3}$$

(i) Bestem potensrækkens konvergensradius. Svaret er
 a) $\rho = \frac{1}{2}$
 b) $\rho = 1$
 c) $\rho = 2$
 d) ved ikke.

(ii) Undersøg for $x = \frac{1}{2}$ om potensrækken (3) er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent. Svaret er

a) absolut konvergent
b) betinget konvergent
c) divergent
d) ved ikke.

Vi sætter nu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{\sqrt{n+1}} x^{2n}, \ x \in ]-\rho, \rho[ \ . \tag{4}$$

(iii) Hvilken oplysning giver (4) om $f(0)$ og $f'(0)$? Svaret er
 a) $f(0) = 0$ og $f'(0) = 1$
 b) $f(0) = 1$ og $f'(0) = 0$
 c) $f(0) = 1$ og $f'(0) = -\frac{4}{\sqrt{2}}$
 d) ved ikke.

**Opgave 544** Betragt rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)} \ . \tag{5}$$

(i) Vis, at rækken (5) er konvergent.

(ii) Bestem en værdi for $N \in \mathbb{N}$ således at den $N$'te afsnitssum

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$$

giver en tilnærmet værdi for summen af rækken (5) med en fejl på højst $10^{-2}$.

(iii) Undersøg om rækken (5) er betinget konvergent eller absolut konvergent.

**Opgave 545** Betragt den $2\pi$-periodiske funktion $f$ givet ved

$$f(t) = t - \tfrac{1}{2}t^2 \ , \quad -\pi < t \leq \pi.$$

Det oplyses (og skal ikke vises), at Fourierrækken for $f$ er givet ved

$$-\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1} \left( \frac{\cos(nt)}{n^2} + \frac{\sin(nt)}{n} \right) \ . \tag{6}$$

(i) Bestem ved hjælp af (6) Fourierkoefficienterne på kompleks form.

(ii) Beregn effekten $P(f)$.

(iii) Beregn hvor stor en procentdel af effekten for $f(t)$ der er indeholdt i den femte afsnitssum for Fourierrækken (6).

**Opgave 546** Betragt differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} - (1 - \frac{2}{t^2})\, y = 0 \ , \ t \in \mathbb{R}_+ \ . \tag{7}$$

(i) Vis, at

$$y_1(t) = te^t, \ t \in \mathbb{R}_+$$

er en løsning til (7).

(ii) Bestem den fuldstændige løsning til (7).

Betragt nu differentialligningen

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t\,\frac{dy}{dt} - (t^2 - 2)\, y = t^3 \ , \ t \in \mathbb{R}_+ \ . \tag{8}$$

(iii) Bestem den fuldstændige løsning til (8).

Opgavesættet er slut!

# DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Side 1 af 4 sider

Skriftlig 2-timers prøve, 7. december 2009

Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Opgave 547: 20% , Opgave 548: 20% , Opgave 549: 30%, Opgave 550: 30%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgave 549 og 550 kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang. Alle svar i opgave 549 og 550 skal begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen.

**Opgave 547 og 548 er multiple-choice opgaver og svaret angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 547 og 548 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke"gives 0 %, ved korrekt svar gives +5%, og ved et forkert svar gives -2.5 %.**

## Opgave 547

(i) Rækken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-\frac{1}{n}}$ er

(a) absolut konvergent.
(b) konvergent, men ikke absolut konvergent.
(c) divergent.
(d) ved ikke.

(ii) Om rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{10}2^n}$ gælder at

(a) begge er konvergente.
(b) begge er divergente.
(c) den ene er divergent, den anden er konvergent.
(d) ved ikke.

I spørgsmål (iii) og (iv) betragtes differentialligningen

$$y'' - y' - 2y = u' + u$$

hvor $u$ er påvirkningen og $y$ er svaret.

(iii) Overføringsfunktionen $H(s)$ er givet ved

a) $H(s) = \frac{1}{s+1}$ hvor $s \neq -1, 2$.
b) $H(s) = \frac{1}{s-2}$ hvor $s \neq -1, 2$.
c) $H(s) = \frac{1}{s-2}$ hvor $s \neq 2$.
d) ved ikke.

**Opgaven fortsætter!**

(iv) Lad nu påvirkningen være givet ved $u(t) = e^{-t}$. Hvilken af nedenstående er korrekt?
a) $y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}$ er en løsning.
b) $H(-1)$ er ikke defineret og derfor er der ingen løsning.
c) $H(-1)$ er ikke defineret, men alligevel er der løsninger. De er blot alle forskellige fra $-\frac{1}{3}e^{-t}$.
d) ved ikke.

**Opgave 548** Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{1}$$

(i) Undersøg stabilitetsforholdene for systemet (1). Hvilket udsagn er korrekt:
a) systemet er asymptotisk stabilt.
b) systemet er stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.
c) systemet er ustabilt.
d) ved ikke.

(ii) Bestem den fuldstændige reelle løsning til systemet (1). Svaret er:
a) $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ , $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
b) $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ , $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
c) $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ , $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
d) ved ikke.

Vi betragter nu det lineære system,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u \,, \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \,. \end{cases} \tag{2}$$

med påvirkning $u(t)$ og svar $y(t)$. Det oplyses, at systemets overføringsfunktion er givet ved

$$H(s) = \frac{s-9}{s^2 - 6s + 13} \,, \; s \in \mathbb{C} \setminus \{3 \pm 2i\} \,.$$

(iii) Bestem for systemet (2) det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = e^{4t}$. Svaret er
a) $y(t) = -e^{4t}$.
b) $y(t) = e^{-4t}$.
c) $y(t) = -e^{-4t}$.
d) ved ikke.

**Opgaven fortsætter!**

(iv) Bestem for systemet (2) det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = 6e^{6t} \sin t$. Svaret er
a) $y(t) = e^{6t}(\cos t + \sin t)$.
b) $y(t) = e^{6t}(-\cos t + \sin t)$.
c) $y(t) = e^{6t}(\cos t - \sin t)$.
d) ved ikke.

**Opgave 549**
Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^5},$$

og lad $S_N(x)$ betegne den $N$'te afsnitssum for denne række.

(i) For hvilke reelle tal $x$ forskellig fra 0 er rækken alternerende? For hvilke $x$ forskellig fra 0 opfylder rækken Leibnitz' kriterium?

(ii) Bestem konvergensradius for rækken. Angiv konvergensforholdene i konvergensintervallets endepunkter.

Lad $f(x)$ betegne rækkens sum for $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(iii) Bestem et naturligt tal $N$ så $|f(x) - S_N(x)| < 0.001$ for alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(iv) Er $f(x)$ lige, eller ulige, eller ingen af delene?

**Opgave 550** Lad $f$ være den $2\pi$-periodiske funktion, der i intervallet $]0, 2\pi]$ er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{for} \quad 0 < t \leq \pi \\ 0 & \text{for} \quad \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

Funktionens Fourierrække er givet ved (skal ikke bevises):

$$f \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \cos(2nt)$$

(i) For hvilke værdier af $t$ er rækken konvergent, og hvilken funktion konvergerer rækken imod?

(ii) Er rækken uniformt konvergent?

(iii) Bestem summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((2n-1)(2n+1))^2}$

(iv) Bestem Fourierrækken for funktionen $|\sin(t)|$.
Vink: Man kan benytte at der gælder: $\sin(t) + |\sin(t)| = 2f(t)$.

Opgavesættet slut.

# DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Side 1 af 4 sider

Skriftlig 2-timers prøve, 6. december 2010
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Opgave 560: 30% , Opgave 561: 30%, Opgave 562: 40%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgave 561 og 562 kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang. Alle svar i opgave 561 og 562 skal begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen.

**NB. Opgave 560 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 560 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke"gives 0 %, ved korrekt svar gives +5%, og ved et forkert svar gives -2.5 %.**

## Opgave 560

I spørgsmål (i) og (ii) betragtes et lineært system med overføringsfunktion givet ved

$$H(s) = \frac{s}{2-s}, \quad s \neq 2.$$

(i) Det stationære svar på påvirkningen $u(t) = e^{-t} - 3e^{t}$ er:
a) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}$
b) $y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t}$
c) $y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} - 3e^{t}$
d) ved ikke.

(ii) Fasekarakteristikken $\varphi(\omega)$ for det lineære system er, for $\omega \neq 0$:
a) $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}(\frac{2}{\omega})$
b) $\varphi(\omega) = \pi + \text{Arctan}(\frac{2}{\omega})$
c) $\varphi(\omega) = \pi - \text{Arctan}(\frac{2}{\omega})$
d) ved ikke.

(iii) For hvilke reelle værdier af konstanten $K$ er systemet med differentialligning

$$3\ddot{x} + (3K-1)\dot{x} + 3x = 0$$

asymptotisk stabilt?
a) $K = \frac{1}{3}$
b) $K < \frac{1}{3}$
c) $K > \frac{1}{3}$
d) ved ikke

**Opgaven fortsætter!**

(iv) Konvergensradius $\rho$ for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n!+n}\right)x^n$ er:

a) $\rho = 0$
b) $\rho = 1$
c) $\rho = \infty$
d) ved ikke

(v) Om den uendelige række $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)\ln(n)}{n!}$ gælder:

a) rækken er divergent
b) rækken er absolut konvergent
c) rækken er betinget konvergent
d) ved ikke

(vi) I differentialligningen

$$t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u(t)$$

er det inhomogene led givet som en potensrække:

$$u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nt^n$$

hvor alle koefficienterne $d_n$ er kendt. Hvis man søger en partikulær løsning $y_p(t)$ som en potensrække

$$y_p(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n$$

hvilken ligning opstår for de ukendte koefficienter $c_n$ ?

a) $c_{n+1}=\frac{d_n}{(n+1)^2}$
b) $c_{n+1}=\frac{d_n}{(n-1)^2}$
c) $c_{n+1}=\frac{d_n}{(n^2-1)^2}$
d) ved ikke

**Opgave 561**

Et homogent lineært system er givet ved følgende 3 koblede differentialligninger:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= -x_2-Gx_3\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}x_3\\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} &= x_1-G^2x_2-x_3\end{aligned}$$

hvor $G$ er en positiv konstant.
(i) Angiv systemmatricen $\mathtt{A}$ for systemet.
**Opgaven fortsætter!**

Her er nogle MAPLE kommandoer med output:

```
> CharacteristicPolynomial(A,lambda);
```

$$\lambda^3 + \lambda^2 - (-G - \frac{1}{2}G^2)\lambda + \frac{1}{2}$$

```
> factor(lambda^3+lambda^2+3/2 *lambda+1/2, complex);
```

$$(\lambda + .40) * (\lambda + .30 + 1.1 * I) * (\lambda + .30 - 1.1 * I)$$

(ii) Er systemet asymptotisk stabilt for $G = 1$ ?
(iii) For hvilke værdier af $G$ er systemet asymptotisk stabilt?

**Opgave 562** Lad $f$ være den $2\pi$-periodiske funktion, der i intervallet $]-\pi, \pi]$ er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi < t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{for} \quad t = 0 \\ \cos(t) & \text{for} \quad 0 < t < \pi \\ -\frac{1}{2} & \text{for} \quad t = \pi \end{cases}$$

Lad $f(t)$ have Fourierrække $f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

(i) Skitser grafen for $f(t)$ for $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

(ii) Vis at i Fourierrækken for $f$ er koefficienten $a_0 = 0$.

(iii) Bestem effekten af $f$.

Lad funktionen $\tilde{f}$ være givet ved $\tilde{f}(t) = f(-t)$.

(iv) Vis at $f(t) + \tilde{f}(t) = \cos(t)$.

Lad $\tilde{f}(t)$ have Fourierrække

$$\tilde{f} \sim \frac{1}{2}\tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(nt) + \tilde{b}_n \sin(nt).$$

(v) Vis at for alle $n$ er $a_n = \tilde{a}_n$.

(vi) Vis at $a_n = 0$ for $n > 1$, og at $a_1 = \tilde{a}_1 = \frac{1}{2}$.

# DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET



Skriftlig 2-timers prøve, 16. maj 2011
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Opgave 564: 30% , Opgave 565: 35%, Opgave 566: 35%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgave 565 og 566 kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang. Alle svar i opgave 565 og 566 skal begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen.

**NB. Opgave 564 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 564 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke"gives 0 %, ved korrekt svar gives +5%, og ved et forkert svar gives -2.5 %.**

## Opgave 564

(1) Hvilke konvergensforhold gælder for rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$ :
a) rækken er betinget konvergent.
b) rækken er absolut konvergent.
c) rækken er divergent.
d) ved ikke.

(2) Hvilken symmetriegenskab har funktionen $f(x)=e^{\sin(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ :
a) $f(x)$ er ulige.
b) $f(x)$ er lige.
c) $f(x)$ er hverken lige eller ulige.
d) ved ikke.

(3) Konvergensradius $\rho$ for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+4}x^n$ er:
a) $\rho = 5$ .
b) $\rho = 1$ .
c) $\rho = \infty$ .
d) ved ikke.

Opgaven fortsætter på næste side.

(4) For den inhomogene lineære differentialligning

$$y'' + y' + 4y = u(t) \ ,$$

hvor $y = y(t)$, $t \geq 0$, er den tilhørende overføringsfunktion givet ved $H(s) = \frac{1}{s^2+s+4}$, $s \in \mathbb{C}\backslash\{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{15}, -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{15}\}$. Hvad er det stationære svar på påvirkningen $u(t) = 2\sin(t)$?
a) $y(t) = -\frac{1}{5}\cos(t) + \frac{3}{5}\sin(t)$ .
b) $y(t) = \frac{3}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)$ .
c) $y(t) = \frac{3}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$ .
d) ved ikke.

(5) For det lineære og homogene differentialligningssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \ , \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} ,$$

oplyses at det karakteristiske polynomium er $P(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+3)$. $\mathbf{x}(t)$ er en 3-dimensional vektorfunktion. Tillige oplyses at nedenstående tre vektor funktioner er lineært uafhængige løsninger til systemet.

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \ , \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} te^{-t} \ , \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} \ ,$$

Hvad gælder for egenværdien $\lambda = -1$ :
a) Den algebraiske multiplicitet er 2 og den geometriske multiplicitet er 1.
b) Den algebraiske multiplicitet er 2 og den geometriske multiplicitet er 2.
c) Den algebraiske multiplicitet er 3 og den geometriske multiplicitet er 2.
d) ved ikke.

Opgaven fortsætter på næste side.

(6) Vi betragter differentialligningen

$$t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ty = 0$$

og søger en løsning på potensrække formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \ .$$

Hvilken rekursionsformel vil de ukendte koefficienter $a_n$ opfylde?
a) $a_n = -\frac{1}{n^2}a_{n-2}$ for $n = 2, 3, 4, \dots$ , og $a_1 = 0$ samt $a_n \neq 0$ for $n = 3, 5, 7, \dots$ .
b) $a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2}a_n$ for $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Koefficienterne $a_0$ og $a_1$ kan begge være forskellige fra 0.
c) $a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2}a_n$ for $n = 0, 2, 4, \dots$ , og $a_n = 0$ for $n = 1, 3, 5, \dots$ .
d) ved ikke.

**Opgave 565**

I denne opgave betragtes det homogene og lineære differentialligningssystem givet ved:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \ , \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & \sigma & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} .$$

Parameteren $\sigma$ er en reel konstant og $t$ er tiden. Vektorfunktionen $\mathbf{x}(t)$ har dimensionen 3.

(1) Bestem tre lineært uafhængige løsninger til systemet for $\sigma = 4$. Egenværdier og egenvektorer må bestemmes med brug af Maple.

(2) Bestem tre lineært uafhængige reelle løsninger til systemet for tilfældet $\sigma = -9$. Maple må bruges til bestemmelse af egenværdier og egenvektorer.

(3) For hvilke værdier af $\sigma \in \mathbb{R}$ er systemet asymptotisk stabilt?

Opgavesættet fortsætter på næste side.

**Opgave 566**

Funktionen $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, er $2\pi$-periodisk og i intervallet $]-\pi, \pi]$ er $f$ givet ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi < t < 0 \\ \alpha & \text{for} \quad t = 0 \\ 4 + \sin(4t) & \text{for} \quad 0 < t < \pi \\ \beta & \text{for} \quad t = \pi \end{cases}$$

På reel form har $f(t)$ Fourierrækken $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.

(1) Bestem $\alpha$ og $\beta$ således at Fourierrækken konvergerer punktvis mod $f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

(2) Skitser grafen for $f(t)$ for $t \in [-\pi, \pi]$.

(3) Undersøg om Fourierrækken er uniformt konvergent.

(4) Bestem samtlige Fourierkoefficienter $a_n$, $n = 0, 1, 2, ...$ og $b_n$, $n = 1, 2, ....$ Du må bruge Maple. Opskriv Fourierrækken for $f(t)$.

Opgavesættet slut.

## F.7 Opgaver til 01025

**Opgave 801** Antag at talfølgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod $x$ og at talfølgen $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod $y$. Formålet med opgaven er at vise at talfølgen $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod $x + y$, altså at

$$x_n + y_n \to x + y \text{ for } n \to \infty. \tag{F.43}$$

(i) Vis at

$$|(x + y) - (x_n + y_n)| \le |x - x_n| + |y - y_n|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Gør rede for at vi for ethvert $\epsilon > 0$ kan finde et $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|x - x_n| \le \epsilon/2 \ \text{ og } \ |y - y_n| \le \epsilon/2$$

for $n \ge N$.

(iii) Benyt (i) og (ii) til at vise den ønskede påstand.

**Opgave 802** Antag at talfølgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod $x$ og lad $c \in \mathbb{C}$. Vis at talfølgen $\{cx_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod $cx$. Der ønskes et formelt argument som i Opgave 801.

**Opgave 803** Benyt reglerne for de elementære funktioners størrelsesforhold (se indersiden af lærebogens omslag) til at afgøre om nedenstående talfølger er konvergente. Angiv i bekræftende fald grænseværdien.

(i) $x_n = \frac{n^3}{2^n}$;

(ii) $x_n = \frac{n^2+1}{2^n+1}$;

(iii) $x_n = \frac{\ln(n^2)}{n^2}$.

**Opgave 804** En talfølge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ siges at være *begrænset* hvis der findes et tal $C \ge 0$ således at

$$|x_n| \le C, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Antag nu at følgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent. Målet med denne opgave er at vise at så er $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ automatisk begrænset.

(i) Antag at $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod $x$. Vis at der findes et $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|x_n| \le |x| + 1, \ \forall n \ge N.$$

(Vink: benyt definitionen på konvergens med $\epsilon = 1$, efterfulgt af trekantsuligheden.)

(ii) Slut nu at $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er begrænset.

**Opgave 810** Vis ved hjælp af et konkret eksempel at resultatet i lemma 4.17 kan være meningsløst hvis man fjerner konvergensantagelserne i lemmaets præmisser.

**Opgave 811** Antag at talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ opfylder at

$$|a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n| \text{ for alle } n \in \mathbb{N}. \tag{F.44}$$

(i) Vis at

$$|a_n| \leq |a_1|(\frac{1}{2})^{n-1} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Vis ved brug af (i) at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent.

I resten af opgaven skiftes antagelsen (F.44) ud med den mere generelle antagelse at der findes et tal $C \geq 0$ således at

$$|a_{n+1}| \leq C|a_n| \text{ for alle } n \in \mathbb{N}. \tag{F.45}$$

(iii) Antag at (F.45) er opfyldt med $C < 1$. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{F.46}$$

er absolut konvergent.

(iv) Kan man slutte noget om konvergensen af rækken i (F.46) hvis (F.45) er opfyldt med $C = 1$?

(v) Hvorfor er resultatet i (iii) mere generelt end bogens udgave af kvotientkriteriet?

**Opgave 813** (**Rodkriteriet**) Antag at der for talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ findes et tal $C \geq 0$ således at

$$|a_n|^{1/n} \leq C \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Antag at $C < 1$. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

er absolut konvergent.

(ii) Kan man slutte noget om konvergensen af rækken hvis $C = 1$?

**Opgave 814:** Lad $a, b, c$ betegne de 3 sidste ciffre i dit studienummer, og betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n(n+b)^c}. \qquad \text{(F.47)}$$

(i) Gør rede for om rækken (F.47) er konvergent eller divergent med de indsatte værdier for $a, b, c$..

(ii) Lad Maple udregne summen af rækken i (F.47) med de indsatte værdier for $a, b, c$, og vis herved at dit svar i (i) er korrekt.

(iii) Bestemt nu helt generelt de værdier for $a, b, c \in \{0, 1, , \ldots, 9\}$ for hvilke rækken (F.47) er konvergent. *Vink:* del op i tilfældene $a = 0$ og $a > 0$.

**Opgave 815** Man kan vise at funktionen

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \ x \in ]-1, 1[$$

har rækkefremstillingen

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1}\, x^{2n-1}, \ x \in ]-1, 1[.$$

Sæt

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{2n-1}\, x^{2n-1}, \ x \in ]-1, 1[.$$

(i) Sæt $x = 1/2$. Find $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(1/2) - S_N(1/2)| \leq 0.1.$$

(ii) Vis at der for alle $x \in [0, 1[$ gælder at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} x^{2n-1}.$$

(iii) Brug (i) og (ii) til at finde $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 0.1$$

*for alle* $x \in [0, 1/2]$.

(iv) Kan du gentage argumentet fra (ii) med intervallet $[0, 1/2]$ erstattet af et interval $[0, r]$ - og i bekræftende fald, for hvilke $r \in \mathbb{R}$?

(v) Plot graferne for funktionen $f(x)$ og afsnitssummerne $S_2(x)$ og $S_5(x)$ for $x \in [0, 0.99]$ i samme koordinatsystem.
**Opgaven fortsætter!**

(vi) Kan man finde $N \in \mathbb{R}$ således at
$$|f(x) - S_N(x)| \leq 0.1$$
*for alle* $x \in [0, 1[$?

Ovenstående viser at man skal være meget forsigtig når man bruger uendelige rækker til approksimation. Vi kan ofte finde en uendelig række, hvis afsnitssummer approkismerer en funktion i et fast punkt; men om afsnitssummen også giver en god approksimation over et helt interval, afhænger i høj grad af det givne interval!

**Opgave 816:** Vi undersøger konvergensforholdene for den uendelige række
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot \ln(n)}{n^n}. \qquad (*)$$
Sæt
$$a_n = \frac{n! \cdot \ln(n)}{n^n}.$$

(i) Vis at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at
$$|a_n| \leq \frac{\ln(n)}{n}.$$

(ii) Giver resultatet i (i) samt $n$'te ledskriteriet information om rækkens konvergensforhold? Brug evt. de elementære funktioners størrelsesforhold, se bagsiden af lærebogens cover.

(iii) Vis at for $n > 1$ er
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

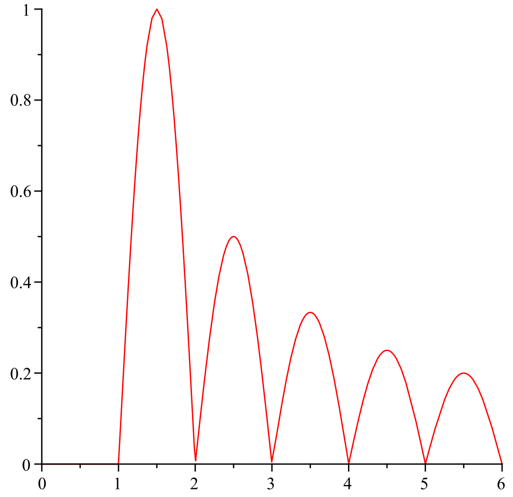
(iv) Det må uden bevis benyttes at
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e \approx 2.718 \text{ for } n \to \infty.$$
Hvilken information kan du nu via (iii) uddrage fra kvotientkriteriet om rækkens konvergensforhold?

(v) Vis at der for alle $n \geq 2$ gælder at
$$|a_n| \leq 2\,\frac{\ln(n)}{n^2}.$$

(vi) Vis ved brug af (v) at rækken (*) er konvergent.
*Vink:* Benyt at
$$\frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}\,\frac{\ln(n)}{n^{1/2}}.$$

**Opgave 818** Definér funktionen $f : [1, \infty[ \to [0, \infty[$ ved at der for $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$f(x) := \frac{\cos(\pi(x - n - 1/2))}{n}, \quad x \in [n, n+1[.$$




Figuren viser grafen for funktionen $f$.

(i) Vis at for $n \in \mathbb{N}$ er

$$\int_n^{n+1} f(x)\, dx = \frac{2}{n\pi}.$$

(ii) Benyt (ii) til for $N \in \mathbb{N}$ at bestemme integralet

$$\int_1^{N+1} f(x)\, dx.$$

(iii) Er integralet

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

konvergent eller divergent?

(iv) Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

er konvergent eller divergent.

(v) Er konklusionerne i (iii) og (iv) i modstrid med integralkriteriet?

**Opgave 819** Lad $a, b$ betegne de sidste 2 ciffre i dit studienummer, og betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{nb+a}{n}. \tag{F.48}$$

(i) Undersøg om rækken er konvergent med de indsatte værdier for $a, b$.

(ii) Bestem nu helt generelt de værdier for $a \geq 0$ og $b \geq 0$ for hvilke rækken er konvergent.

**Opgave 860** Målet med denne opgave er at vise at enhver funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

på entydig måde kan skrives som en sum af en lige funktion og en ulige funktion.

(i) Antag at $f(x) = f_L(x) + f_U(x)$, hvor $f_L$ er lige og $f_U$ er ulige. Vis, at så er $f(-x) = f_L(x) - f_U(x)$.

(ii) (Entydighed) Antag at $f(x) = f_L(x) + f_U(x)$, hvor $f_L$ er lige og $f_U$ er ulige. Vis ved brug af (i) at så er

$$f_L(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_U(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \tag{F.49}$$

(iii) (Eksistens) Vis at funktionerne $f_L$ og $f_U$ i (F.49) faktisk er henholdsvis lige og ulige, og at

$$f(x) = f_L(x) + f_U(x).$$

**Opgave 861** Vi betragter funktioner $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(i) Antag at funktionerne $f$ og $g$ er lige. Vis at funktionen $fg$ er lige.

(ii) Antag at funktionen $f$ er lige og at funktionen $g$ er ulige. Vis at funktionen $fg$ er ulige.

**Opgave 862** Antag at en $2\pi$-periodisk funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er givet ved

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}, \tag{F.50}$$

hvor rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n$ er absolut konvergent. Målet med opgaven er at vise, at så er koefficienterne $d_n$ nødvendigvis givet ved det velkendte udtryk for Fourierkoefficienterne på kompleks form.

(i) Vis at rækken i (F.50) har en konvergent majorantrække.

(ii) Beregn for ethvert tal $m \in \mathbb{Z}$ integralet

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx.$$

(iii) Vis ved brug af (ii) og sætning 5.34 at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}\, e^{-imx}\, dx = 2\pi d_m, \ \forall\, m \in \mathbb{Z}.$$

(iv) Slut ved hjælp af (iii) at hvis funktionen $f$ er givet ved (F.50), så er

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**Opgave 863** Målet med denne opgave er at lave et formelt bevis for regnereglerne **(R1)-(R3)** i lemma 6.2.

(i) Indse ved hjælp af et par skitser af simple funktioner at regnereglerne **(R1)-(R3)** er rimelige.

(ii) Bevis regneregel **(R2)**.

(iii) Bevis regneregel **(R3)**.

(iv) Bevis regneregel **(R1)** for $a \in [0, 2\pi]$.
*Vink:* Benyt at

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_a^{2\pi} f(x)\, dx = \int_0^a f(x + 2\pi)\, dx + \int_a^{2\pi} f(x)\, dx,$$

og indfør en passende substitution i det første integral.

(v) Bevis regneregel **(R1)** for et vilkårligt $a \in \mathbb{R}$.
*Vink:* Et vilkårligt $a \in \mathbb{R}$ kan skrives $a = 2\pi p + b$ for et passende $p \in \mathbb{Z}$ og et passende $b \in [0, 2\pi[$. Dermed er

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\, dx = \int_{2\pi p+b}^{2\pi p+b+2\pi} f(x)\, dx.$$

Indfør nu variabelskiftet $y = x - 2\pi p$, og benyt resultatet i (iv).

**Opgave 864** Vi betragter følgende funktioner, der alle tænkes udvidet til $2\pi$-periodiske funktioner på $\mathbb{R}$ :

(i) $f_1(x) = |\cos(x)|, \; x \in [-\pi, \pi[.$

(ii) $f_2(x) = x^3, \; x \in [-\pi, \pi[.$

(iii) $f_3(x) = \sqrt{|x|}, \; x \in [-\pi, \pi[.$

(iv) $f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & x \in ]-\pi, \pi[ \\ 0, & x = -\pi. \end{cases}$

(i) Lav en skitse af hver af funktionerne $f_1, f_2, f_3, f_4$.

(ii) Hvilke af funktionerne $f_1, f_2, f_3, f_4$ er stykkevist differentiable?

**Opgave 871** I denne opgaver vises nogle af de resultater der indgår i beviset for lemma A.27.

(i) For en given $2\pi$-periodisk og stykkevis differentiabel funktion $f$, sæt $\psi(x) := f(-x)$. Vis at

$$(S_N\psi)(x) = (S_N f)(-x).$$

*Vink:* kald Fourierkoefficienterne for $f$ og $\psi$ for henh. $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ og $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, og vis først at $d_k = c_{-k}, \; \forall k \in \mathbb{Z}$.

Vi antager nu at funktionen $f$ opfylder betingelserne i lemma A.27.

(ii) Vis at funktionen $\phi$ i (A.53) opfylder betingelserne (a)–(c) i lemma A.26, dvs. $\phi$ er $2\pi$-periodisk, stykkevis differentiabel, lige, $\phi(0) = 0$, og

$$\frac{\phi(0^+) + \phi(0^-)}{2} = \phi(0). \tag{F.51}$$

(iii) Vis at

$$(S_N\phi)(x) = \frac{(S_N f)(x) + (S_N f)(-x)}{2}.$$

*Vink:* benyt resultatet i (i) til at omskrive højresiden, og beregn herefter den $k'$te Fourierkoefficient for funktionen $f + \psi$.

**Opgave 872** I denne opgaver vises nogle af de resultater der indgår i beviset for proposition A.28. Antag at funktionen $f$ opfylder betingelserne i proposition A.28, lad $u \in [-\pi, \pi]$, og definer funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$\phi(x) := f(x+u).$$

(i) Vis at funktionen $\phi$ opfylder betingelserne i lemma A.27, dvs. at $\phi$ er $2\pi$-periodisk, stykkevis differentiabel, $\phi(0) = 0$, og at

$$\frac{\phi(0^+) + \phi(0^-)}{2} = \phi(0).$$

(ii) Vis at der for ethvert $n \in \mathbb{Z}$ gælder at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\, e^{-inx}\, dx = e^{inu} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy.$$

*Vink:* Indsæt udtrykket for funktionen $\phi$ i integralet på venstresiden og udfør variabelskiftet $y = x + u$.

(iii) Vis ved hjælp af (ii) at $(S_N\phi)(0) = (S_N f)(u)$.

**Opgave 873** I denne opgaver vises nogle af de resultater der indgår i beviset for proposition A.29. Antag at funktionen $f$ opfylder betingelserne i proposition A.29, og lad $u \in [-\pi, \pi]$. Definér funktionen $\phi$ ved (A.58), dvs.

$$\phi(x) = f(x) - f(u).$$

(i) Vis at $\phi$ opfylder betingelserne i proposition A.28, dvs. at $\phi$ er $2\pi$-periodisk, stykkevis differentiabel, $\phi(u) = 0$, og

$$\frac{\phi(u^+) + \phi(u^-)}{2} = \phi(u).$$

(ii) Lad $\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ betegne Fourierkoefficienterne for funktionen $\phi$ og $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ betegne Fourierkoefficienterne for $f$. Vis at

$$d_n = \begin{cases} c_n & \text{for } n \neq 0, \\ c_n - f(u) & \text{for } n = 0. \end{cases}$$

(iii) Vis ved brug af (ii) at

$$(S_N\phi)(x) = (S_N f)(x) - f(u), \ \forall x.$$

**Opgave 874** Antag at $f$ er en stykkevis differentiabel og $2\pi$-periodisk funktion. Lad $u \in [-\pi, \pi]$, og definér funktionen $\phi : [-\pi, \pi[ \to \mathbb{C}$ ved

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi, u[\ \cup\ ]u, \pi[, \\ \dfrac{f(u^+) + f(u^-)}{2}, & x = u. \end{cases} \tag{F.52}$$

Vi udvider $\phi$ til en $2\pi$-periodisk funktion på $\mathbb{R}$. Vis at $\phi$ er stykkevis differentiabel, og at

$$\frac{\phi(u^+) + \phi(u^-)}{2} = \phi(u).$$

**Opgave 879** Man kan vise (Matematik 4) at $L^2(-\pi, \pi)$ kan udstyres med et såkaldt *komplekst indre produkt,* $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(-\pi, \pi) \times L^2(-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad f, g \in L^2(-\pi, \pi).$$

Sæt

$$||f|| := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad f \in L^2(-\pi, \pi).$$

To funktioner $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ siges at være *ortogonale* hvis

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

(i) Vis at hvis $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ er ortogonale, så er

$$||f + g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2.$$

En samling funktioner $\{e_k\}$ i $L^2(-\pi, \pi)$ siges at udgøre et *ortonormalsystem* hvis $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ for alle $k \neq j$ og $\langle e_k, e_k \rangle = 1$ for alle $k$. Betragt nu et ortonormalsystem $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, og lad $N \in \mathbb{N}$.

(ii) Vis at for enhver funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ er funktionerne

$$\sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k \quad \text{og} \quad f - \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k$$

ortogonale.

(iii) Vis at

$$\left|\left| \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k \right|\right|^2 = \sum_{k=-N}^{N} |\langle f, e_k \rangle|^2, \ \forall f \in L^2(-\pi, \pi).$$

**Opgaven fortsætter!**

(iv) Vis at

$$\sum_{k=-N}^{N} |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq ||f||^2,$$

og konkluder at

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq ||f||^2,$$

(v) Hvilken sammenhæng er der mellem resultatet i (iii) og Parsevals sætning?

(vi) Vis at funktionerne $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ givet ved

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

udgør et ortonormalsystem i $L^2(-\pi, \pi)$.

(vii) Gør rede for at der for enhver funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ gælder at

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ikx}\, dx \to 0 \text{ for } k \to \pm\infty.$$

**Opgave 880** Bevis (7.31) i lærebogen. *Vink: benyt et resultat fra opgave 879.*

**Opgave 890** Betragt opgave 531 i bogen, og vis at den betragtede differentialligning faktisk har den løsning der angives i (F.31)

**Opgave 891** Betragt differentialligningen

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - (t+1)\frac{dy}{dt} + y = 0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{F.53}$$

Vi antager at en funktion af typen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

er løsning.

(i) Vis at

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0 \tag{F.54}$$

**Opgaven fortsætter!**

(ii) Bring ved passende skift af summationsindexet alle led på venstresiden på formen $\sum d_n t^n$ for passende $d_n$, og omform herved (F.54) til

$$c_0 - c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)[(n+1)c_{n+1} - c_n]t^n = 0. \tag{F.55}$$

(iii) Gør ved hjælp af (F.55) rede for at

$$c_0 = c_1 \text{ og } c_{n+1} = \frac{1}{n+1}c_n,\ n \geq 2. \tag{F.56}$$

Vi leder nu efter en løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne

$$y(0) = 1,\ y''(0) = 1.$$

(iv) Begyndelsesbetingelserne fastlægger koefficienterne $c_0$ og $c_2$. Bestem ved hjælp af (F.56) et formeludtryk for $c_n$.

(v) Find konvergensradius for den opnåede potensrækkeløsning

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

og angiv hvilken funktion der er tale om (se evt. potensrækkefremstillingerne i appendiks B).

(vi) Bestem en løsning $y_2$ til (F.53) som er lineært uafhængig med funktionen $y$ i (v).

(vii) Bestem en løsning til differentialligningen

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - (t+1)\frac{dy}{dt} + y = t^2e^t,\ t > 0. \tag{F.57}$$

(viii) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen (F.57).

**Opgave 901** Lad $\lambda \in \mathbb{R}$ og betragt funktionen

$$f(t) = te^{\lambda t}.$$

Vis at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$f^{(n)}(t) = n\lambda^{(n-1)}e^{\lambda t} + t\lambda^n e^{\lambda t}. \tag{F.58}$$

**Opgave 902** Antag at $\lambda_1$ og $\lambda_2$ er forskellige reelle tal. Målet er at vise at funktionerne

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ te^{\lambda_2 t}$$

er lineært uafhængige. Antag derfor at

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_2 t} + c_4 t e^{\lambda_2 t} = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Vi kan antage at $\lambda_1 > \lambda_2$.

(i) Vis at $c_1 + c_3 = 0$.

(ii) Vis, at

$$c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 t e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_3 + c_4 t = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

(iii) Lad nu $t \to -\infty$. Hvilken konklusion kan du nu uddrage udfra (ii)?

(iv) Vis med udgangspunkt i (iii) at de angivne funktioner er lineært uafhængige.

(v) Hvordan skal beviset modificeres hvis $\lambda_1 < \lambda_2$?

**Opgave 903** Betragt en homogen andenordens differentialligning,

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Antag at $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ er rod i den tilhørende karakterligning, og betragt funktionen

$$y(t) = te^{\lambda_0 t}. \tag{F.59}$$

(i) Vis ved indsættelse at funktionen $y$ i (F.59) opfylder at

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = (2a_0\lambda_0 + a_1)e^{\lambda_0 t}. \tag{F.60}$$

(ii) Antag at $\lambda_0$ er dobbeltrod. Vis at så er funktionen $y$ i (F.59) løsning til differentialligningen. (*Vink:* opskriv udtrykket for løsningerne til andengradsligningen

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

- hvordan ser løsningen ud når $\lambda_0$ er dobbeltrod?)

(iii) Antag at $\lambda_0$ *ikke* er dobbeltrod. Vis at så er funktionen $y$ i (F.59) *ikke* løsning til differentialligningen. *Vink:* udregningerne i (ii) viser at hvis $\lambda_0$ ikke er dobbeltrod, så er $\lambda_0 \neq \frac{-a_1}{2a_0}$. Benyt så (F.60).

**Opgave 904** Målet med denne opgave er at bevise lemma A.13.

(i) Vis at der for enhver differentiabel funktion $u$ gælder at

$$(D-\lambda)(e^{\lambda t}u) = e^{\lambda t}u'.$$

(ii) Slut udfra (i) at der for ethver $m$ gange differentiabel funktion $u$ gælder at

$$(D-\lambda)^m(e^{\lambda t}u) = e^{\lambda t}u^{(m)}.$$

(iii) Benyt (ii) med $m=p$ til at vise at funktionerne

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ \cdots\ t^{p-1}e^{\lambda t} \tag{F.61}$$

er løsninger til (A.13).

(iv) Vis at funktionerne i (F.61) er lineært uafhængige.

**Opgave 905** I denne opgave vises at løsningerne angivet i sætning 1.14 er lineært uafhængige under antagelsen $\lambda_j \in \mathbb{R}, j=1,\ldots,k$.

(i) Vis at funktionerne

$$y(t)=e^t, y(t)=e^{2t}, y(t)=e^{3t},$$

er lineært uafhængige.

(ii) Lad $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ betegne $n$ forskellige, reelle, og positive tal, således at

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n.$$

Vis, at funktionerne

$$y(t)=e^{\lambda_1 t}, y(t)=e^{\lambda_2 t}, \cdots, y(t)=e^{\lambda_n t}$$

er lineært uafhængige.

(iii) Vis at resultatet i (ii) også gælder *uden* antagelsen om at $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er positive. Vink: vælg et positivt tal $\Lambda > -\lambda_1$ og betragt funktionerne

$$y(t)=e^{(\Lambda+\lambda_1)t}, y(t)=e^{(\Lambda+\lambda_2)t}, \cdots y(t)=e^{(\Lambda+\lambda_n)t}.$$

(iv) Vis at funktionerne

$$y(t) \quad = \quad e^{2t}, y(t)=e^{3t}, y(t)=te^{2t}, y(t)=te^{3t}$$

er lineært uafhængige.

**Opgaven fortsætter!**

(v) Lad $k \in \mathbb{N}$, og lad $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ betegne $n$ forskellige, reelle, og positive tal, således at

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n.$$

Vis, at funktionerne

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{\lambda_1 t}, y(t) = e^{\lambda_2 t}, \cdots, y(t) = e^{\lambda_n t} \\
y(t) &= te^{\lambda_1 t}, y(t) = te^{\lambda_2 t}, \cdots, y(t) = te^{\lambda_n t} \\
&. \\
&. \\
y(t) &= t^k e^{\lambda_1 t}, y(t) = t^k e^{\lambda_2 t}, \cdots, y(t) = t^k e^{\lambda_n t}
\end{aligned}$$

er lineært uafhængige. Vink: antag at

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{M} c_{m,k} t^m e^{\lambda_k t} = 0,$$

dvs. at

$$\left(\sum_{m=0}^{M} c_{m,1} t^m\right) e^{\lambda_1 t} + \left(\sum_{m=0}^{M} c_{m,2} t^m\right) e^{\lambda_2 t} + \cdots + \left(\sum_{m=0}^{M} c_{m,n} t^m\right) e^{\lambda_n t} = 0$$

og brug argumenter fra de tidligere spørgsmål).

(vi) Vis ved overvejelser som i (ii) at antagelsen om at $\lambda$'erne er positive kan elimineres.

**Opgave 910** (**Bevis for sætning 1.9**).

(i) Vis at funktionerne i (1.12) er løsninger til (1.6).

(ii) Vis at funktionerne i (1.12) er lineært uafhængige (kan gøres direkte, eller ved brug af lemma A.15).

**Opgave 912** Bevis lemma A.15.

**Opgave 913** Antag at vektorerne $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært uafhængige. Vis at så er vektorerne

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \text{ og } \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

også lineært uafhængige.

**Opgave 914** (**Bevis for at funktionerne i sætning 2.6 (b) er løsninger og er lineært uafhængige.**).

Vi betragter ligningen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

(i) Gør rede for at komplekse egenværdier optræder i par, $a \pm i\omega$.

Lad $\mathbf{v} = \operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}$ være en egenvektor hørende til egenværdien $\lambda = a + i\omega$.

(ii) Vis at

$$\mathbf{A}(\operatorname{Re}\mathbf{v}) = a\operatorname{Re}\mathbf{v} - \omega\operatorname{Im}\mathbf{v}, \quad \mathbf{A}(\operatorname{Im}\mathbf{v}) = a\operatorname{Im}\mathbf{v} + \omega\operatorname{Re}\mathbf{v}.$$

(iii) Vis at $\operatorname{Re}\mathbf{v} - i\operatorname{Im}\mathbf{v}$ er en egenvektor hørende til egenværdien $a - i\omega$.

(iv) Ifølge sætning 2.3 har differentialligningssystemet de to løsninger

$$\mathbf{u}_1(t) = e^{(a+i\omega)t}\left(\operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}\right) \text{ og } \mathbf{u}_2(t) = e^{(a-i\omega)t}\left(\operatorname{Re}\mathbf{v} - i\operatorname{Im}\mathbf{v}\right).$$

Udregn disse løsninger.

(v) Vis at funktionerne

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) \quad \text{og} \quad \mathbf{x}(t) = \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right)$$

er løsninger til (2.10) og er lineært uafhængige. (*Vink:* benyt sætning 2.3 og lemma A.15.)

**Opgave 915** (**Bevis for løsningsudtrykket i** (2.34)) Betragt differentialligningen i (2.32),

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

Sæt $u(t) := e^{st}$ og antag at $\det(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) \neq 0$. Lad endvidere $\mathbf{x}_0$ være en vektor, og sæt

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{st}.$$

Vis at $\mathbf{x}(t)$ er løsning til differentialligningen hvis og kun hvis

$$\mathbf{x}_0 = -(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}.$$

**Opgave 916** For $n$'te ordens differentialligningen (2.7), kald matricen på side 30 for $\mathbf{A}_n$.

(i) Vis, at for en 2.ordens differentialligning er

$$\det(\mathbf{A}_2 - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_2.$$

(ii) Vis ved brug af (i), at for 3.ordens differentialligningen er

$$\det(\mathbf{A}_3 - \lambda\mathbf{I}) = -(\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3).$$

(iii) Vis, at for $n = 2, 3, ...$ er

$$\det(\mathbf{A}_{n+1} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda \det(\mathbf{A}_n - \lambda\mathbf{I}) + (-1)^{n+1}b_{n+1}. \qquad \text{(F.62)}$$

Man kan herved vise (kræves ikke) at for alle $n \in \mathbb{N}$ er

$$\det(\mathbf{A}_n - \lambda\mathbf{I}) = (-1)^n(\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_n). \qquad \text{(F.63)}$$

Fremgangsmåden er som følger: antag at (F.63) holder for én værdi af $n$. Indsæt nu (F.63) i (F.62) og slut, at så gælder (F.63) også for $n+1$. Da (F.63) holder for $n = 2$ og vi altid kan komme fra én $n$-værdi til den næste, er argumentet hermed afsluttet. Et bevis af denne type kaldes et *induktionsbevis.*

Opgave 916 viser, at egenværdierne for systemmatricen $\mathbf{A}_n$ netop er rødderne i karakterligningen for n'te ordens differentialligningen. Stabiliteten af n'te ordens differentialligningen kan altså undersøges direkte v.h.a. karakterligningen - vi behøver ikke at opstille det tilsvarende system.

**Opgave 917**

Et Sallen-Key lowpass filter er et elektrisk kredsløb bestående af nogle modstande og kondensatorer med komponentværdier $R_1, R_2, C_1$, og $C_2$. Det kan vises, at sammenhængen mellem indgangsspændingen $x(t)$ og udgangsspændingen $y(t)$ er givet ved

$$y'' + a_1y' + a_0y = bx, \qquad \text{(F.64)}$$

hvor

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1} - \frac{K}{R_2C_2}, \; a_0 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}, \\ b &= \frac{K}{R_1R_2C_1C_2}, \quad K = 1 + \frac{R_4}{R_3}. \end{aligned}$$

Vi betragter komponentvalget $R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = 1$. Bestem de værdier af $K$ for hvilke systemet (F.64) er asymptotisk stabilt, og slut at $R_4 < 2R_3$.

**Opgave 918** Betragt differentialligningen

$$y'' - y' - 2y = 0. \tag{F.65}$$

(i) Find alle reelle løsninger til (F.65).

(ii) Find den løsning, for hvilken $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

(iii) Find den løsning, for hvilken $y(0) = 1, y'(0) = -1.03$.

(iv) Plot løsningnerne i (ii) og (iii), og forklar hvorfor det er uheldigt hvis en modelleringsproces leder til et system af typen (F.65).

(v) Er systemet (F.65) asymptotisk stabilt?

(vi) Opstil 1.ordens differentialligningssystemet svarende til (F.65), og tegn et faseportræt.

(vii) Kan en tilsvarende drastisk afhængighed af begyndelsesbetingelserne forekomme for ligningen (F.64), der beskriver et Sallen-Key lowpass filter) (*Hint:* undersøg røddernes fortegn).

**Opgave 919** I sætning 1.24 løses differentialligningen (1.16) for $u(t) = e^{st}$ under antagelsen at $s$ ikke er rod i karakterligningen. I denne opgave undersøges i et konkret tilfælde hvad der sker når $s$ er rod i karakterligningen. Vi betragter differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = u' + u. \tag{F.66}$$

(i) Bestem overføringsfunktionen.

(ii) Opskriv for $s \neq \pm 1$ det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = e^{st}$.

(iii) Find den fuldstændige reelle løsning til (F.66) når $u(t) = e^{-t}$.

(iv) Find den fuldstændige reelle løsning til (F.66) når $u(t) = e^{t}$ (brug evt. sætning 1.31).

(v) Bestem en løsning til (F.66) når

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} n e^{-nt}$$

for et givet $N = 2, 3, 4, \ldots$.

(vi) Bestem en løsning til (F.66) når

$$u(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

for et givet $N \in \mathbb{N}$ og vilkårlige koefficienter $c_n \in \mathbb{C}$.

**Opgave 920** (**Bevis for den generelle løsningsformel**) Betragt sætning 2.19.

(i) Vis ved indsættelse at udtrykket i (2.25) faktisk er løsning til differentialligningssystemet (2.21).

(ii) Gør rede for at udtrykket i (2.25) giver samtlige løsning til differentialligningssystemet (2.21).

(iii) Gør rede for at løsningen i (2.26) opfylder den givne begyndelses-betingelse.

**Opgave 923** Bevis sætning 2.16.

**Opgave 925** For givne reelle tal $a, b, c, d$ betragtes differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{F.67}$$

For en $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ defineres tallet $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ (betegnes *sporet* af $\mathbf{A}$) som summen af diagonalelementerne. For en $2 \times 2$ matrix fås altså

$$\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

(i) Udregn det karakteristiske polynomium.

(ii) Vis at systemet (F.67) er asymptotisk stabilt hvis og kun hvis matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

opfylder at

$$\det(\mathbf{A}) > 0 \text{ og } \operatorname{tr}(\mathbf{A}) < 0.$$

**Opgave 926** Lad $\alpha, \beta > 0$ være givne tal. Vi betragter differentialligningen

$$t\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + (\alpha + t)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \beta y(t) = 0,$$

og søger en løsning på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \tag{F.68}$$

Ved indsættelse af udtrykket (F.68) i differentialligningens venstre side kan det vises (skal **ikke** gøres) at

$$t\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + (\alpha + t)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \beta y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+\beta)c_n + (n+1)(n+\beta)c_{n+1}]t^n\ .$$

(i) Gør rede for at hvis en potensrække på formen (F.68) opfylder differentialligningen, så gælder at

$$c_{n+1} = -\,\frac{n+\alpha}{(n+1)(n+\beta)}\,c_n \text{ for } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{F.69}$$

(ii) Bestem ved brug af (F.69) konvergensradius for en vilkårlig potensrækkeløsning til differentialligningen.
*Vink:* benyt kvotientkriteriet. Det er ikke nødvendigt at beregne koefficienterne $c_n$.

**Opgave 940** Lad $a \in \mathbb{R}$. Et ulineært system er givet ved følgende 2 koblede differentialligninger:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = & -(x_1 - a)x_2 \\ \dot{x_2} = & x_1 \sin(3 - x_2) \end{cases} \tag{F.70}$$

(i) Vis at punktet $(x_1, x_2) = (a, 3)$ er et stationært punkt.

(ii) Vis at systemets funktionalmatrix i punktet $(x_1, x_2) = (a, 3)$ er

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

(iii) Afgør om det stationære punkt $(a, 3)$ er asymptotisk stabilt når $a > 0$.

(iv) Afgør om det stationære punkt $(a, 3)$ er stabilt når $a < 0$.

**Opgave 951 (eksamen 2012)**
For $a \geq 0$ betragtes den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^a}. \tag{F.71}$$

(i) Bestem de værdier af $a \geq 0$ for hvilke rækken er konvergent.

(ii) Er rækken i (F.71) uniformt konvergent på intervallet $[0, 1/2]$?

# Litteratur


[1] Nakhlé H. Asmar: *Partial Differential Equations with Fourier series and Boundary Value Problems.* Pearson Education, 2005.

[2] Ole Christensen: *Functions, spaces, and expansions.* Birkhäuser, 2009.

[3] Ole Christensen og Khadija L Christensen: *Approximation Theory: From Taylor Polynomials to Wavelets.* Birkhäuser 2003.

[4] J. Conway: *One complex variable.* Springer, 1985.

[5] J. Fourier: *The analytical theory of heat.* Dover, New York. Oversættelse af Fouriers originale artikel *Theorie analytique de la chaleur*, Didot, Paris, 1822.

[6] Vagn Lundsgaard Hansen: *Fundamental Concepts in Modern Analysis.* World Scientific, Singapore, 1999.

[7] Vagn Lundsgaard Hansen: *Functional Analysis: Entering Hilbert space.* World Scientific, Singapore, 2006.

[8] Vagn Lundsgaard Hansen: *Entrance to advanced mathematics.* World Scientific, Singapore, 2008.

[9] S. Jaffard, Y. Meyer, og R. D. Ryan: *Wavelets; Tools for science and technology.* SIAM, 2001.

[10] E. W. Kamen and B. S. Heck: *Fundamentals of signals and systems using the web and Matlab.* Prentice Hall New Jersey, 2000.

[11] W. Rudin: *Real and complex analysis.* McGraw Hill, 1966.

[12] E. B. Saff: og A. D. Snider: *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science.* Third Edition. Prentice Hall. 2003.

[13] W. A. Strauss: *Partial differential equations.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2008.

[14] S. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Westview Press 2000.

[15] D. Walnut: *An introduction to wavelet analysis.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[16] S. Wiggins: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer Verlag 1990.